

一种准零刚度声学超材料板的低频宽频带隔声行为

胥强荣 沈承 韩峰 卢天健

**Broadband low-frequency sound insulation performance of quasi-zero stiffness local resonant acoustic metamaterial plate**

Xu Qiang-Rong Shen Cheng Han Feng Lu Tian-Jian

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 244302 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20211203

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211203>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

## 一种准零刚度声学超材料板的低频宽频带隔声行为\*

胥强荣<sup>1)</sup> 沈承<sup>1)2)†</sup> 韩峰<sup>1)3)</sup> 卢天健<sup>1)‡</sup>

1) (南京航空航天大学, 机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

2) (西安交通大学, 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

3) (上海飞机设计研究院功能结构部, 上海 201210)

(2021年6月28日收到; 2021年8月10日收到修改稿)

在传统弹簧-振子局域共振基础上, 本文并联倾斜弹簧负刚度机构, 提出一种新型的准零刚度局域共振型声学超材料板, 以实现低频宽频带有效隔声. 首先, 从动力学角度推导准零刚度结构的归一化等效刚度; 然后, 基于等效介质法建立声学超材料板的隔声理论模型, 并通过理论分析和数值模拟(有限元)结果, 讨论其在正负等效刚度区的隔声效果; 最后, 为验证理论预测的准确性, 制备准零刚度超材料板样件并采用阻抗管对其进行测试. 结果表明: 在正刚度区, 增大弹簧的刚度比或预压缩量可显著降低超材料板的局域共振频率, 如在 10 Hz 附近获得 30 dB 的传输损失, 实现了超低频隔声. 在负刚度区, 超材料板不产生局域共振现象, 且可避免“吻合效应”引起的隔声低谷现象, 故可在 53—1500 Hz 宽频段内实现大宽带隔声(大于 30 dB), 相较传统材料或类似的超材料具有显著优势. 进一步利用理论模型, 从等效质量面密度、反射系数和声阻抗率等多个角度, 分析了超材料板的隔声机理, 在隔声峰处发现了负的等效质量密度, 且隔声谷处产生了低频“吻合效应”. 本文提出利用准零刚度局域共振思想实现低频宽带隔声的方法, 克服了传统超材料需减小刚度或增大附加质量的不利特性, 对低频隔声结构的设计具有重要的理论指导意义.

**关键词:** 超材料, 局域共振, 准零刚度, 低频, 隔声**PACS:** 43.20.+g, 43.40.+s, 43.60.+d, 63.20.-e**DOI:** 10.7498/aps.70.20211203

## 1 引言

中高频噪声通常可采用吸音棉、穿孔板等方案进行有效控制. 相较而言, 由于低频声波(20—400 Hz)在传播过程中的穿透能力强, 难以衰减, 目前对低频甚至超低频声波的抑制尚未形成较好的方法<sup>[1,2]</sup>. 近年来, 声子晶体和声学超材料在国内外实现了快速发展, 为解决该难题提供了新的思路. 作为一种亚波长复合微结构<sup>[3]</sup>, 通过巧妙设计结构单元的微结构排布位置和方式, 声学超材料可在宏观上表现出天然材料所不具备的声学性能, 如

负等效质量密度<sup>[4]</sup>、负等效模量<sup>[5]</sup>、负折射和平面聚焦<sup>[6]</sup>等, 进而实现“声隐身”<sup>[7]</sup>、“完美透镜”<sup>[8]</sup>和“低频吸声”<sup>[9]</sup>等新颖应用.

基于对声波的控制机理, 可将声学超材料分为 Bragg 散射和局域共振两大类. Bragg 散射指的是微结构周期变化的材料和弹性波相互作用, 会使某些频率的波在材料中无法传播, 即产生 Bragg 散射带隙<sup>[10]</sup>. 但是, 波长和晶格尺寸处在同一量级才产生 Bragg 带隙, 故 Bragg 散射仅能抑制高频声波. 2000 年, Liu 等<sup>[11]</sup>以黏弹性软材料包裹铅球组成简单立方晶格结构镶嵌于环氧树脂中, 构建了一种三组元声子晶体, 其禁带的对应波长大于晶格尺

\* 国家自然科学基金(批准号: 11502110, 11972185)和机械结构强度与振动国家重点实验室开放基金(批准号: SV2018-KF-01)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: cshen@nuaa.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: tjlu@nuaa.edu.cn

寸两个量级,突破了 Bragg 散射机理的限制.目前,虽然采用三组元声学超材料可取得较好的低频隔声性能,但其制备和使用均存在较大局限.

相较而言,二维薄膜/薄板型声学超材料具有更大的应用价值,获得了广泛关注<sup>[12-16]</sup>.梅军等<sup>[17]</sup>发现,在薄膜中央附加一质量块,可在两个最低本征频率之间的某个特定频率处实现声波的全反射,且该频率附近具有负的等效动态质量密度,实验结果表明,该设计在 100—1000 Hz 频段内具有良好隔声效果.贺子厚等<sup>[18]</sup>设计了一种带附加质量的薄膜底面 Helmholtz 腔吸声结构,基于有限元法预测了其在 20—1200 Hz 内的传输损失,发现其隔声性能较单一 Helmholtz 腔或薄膜声学超材料更好.贺子厚等<sup>[19]</sup>还将压电质量块嵌入薄膜,设计了一种共振频率可调的声学超材料,并分析了其隔声机理.与薄膜型声学超材料类似,可大致将薄板型声学超材料分为三种形式:1)在薄板上穿孔,构造穿孔板结构;2)在薄板上构造 Helmholtz 共振腔;3)在薄板表面附加弹簧-质量块.通过在薄板上附加周期性的“弹簧-质量”共振单元,Xiao 等<sup>[20]</sup>构造了一种局域共振型板结构,运用平面波展开法计算了其局域共振带隙,分析了带隙的产生机理和调控规律;在此基础上,Xiao 等<sup>[21]</sup>进一步分析了这种局域共振板的低频隔声性能,发现其在共振频率处具有超乎寻常的隔声量.值得指出的是,采用局域共振型薄膜/薄板结构降低隔声峰值频率,一般通过增大质量块的质量或减小弹簧的刚度实现,但增大质量会提高整体的面密度,过度减小刚度则使弹簧无法满足基本的承载功能.因此,基于这类局域共振板,如何实现低频甚至超低频隔声仍然是一个难点,有必要探索新的低频宽带隔声方法.

针对低频弹性波的控制,学者们提出了一种非线性准零刚度隔振器,其基本原理是将正刚度结构与负刚度机构并联,该组合系统在静平衡位置的组合刚度为零,但其初始组合刚度并未降低.准零刚度系统具有高的静态刚度和低的动态刚度,亦称“高静低动”系统,其构造形式多样化,如“压杆屈曲系统”<sup>[22]</sup>、“双倾弹簧系统”<sup>[23]</sup>、“扭转磁力弹簧系统”<sup>[24]</sup>等.

目前,国内外多采用准零刚度系统抑制振动,未见基于准零刚度隔振器概念构建低频宽带隔声板结构的相关研究.本文在薄板上周期性布置准零刚度谐振单元,创新地提出一种准零刚度局域共

振型声学超材料板,采用理论、仿真和实验相结合的研究手段,对其隔声特性和机理进行系统分析和讨论,以期对低频乃至超低频隔声提供新的概念和方法.

## 2 模型建立

### 2.1 准零刚度局域共振结构

如图 1 所示,本文提出一种准零刚度局域共振型声学超材料板,由方形金属薄板(铝板)及周期分布其上的准零刚度谐振单元组合而成.其中,A 为铝板,厚度  $h = 4 \text{ mm}$ ,元胞尺寸  $a = 25 \text{ mm}$ ;B 为准零刚度谐振单元的外围框架,材质为环氧树脂,尺寸  $H = 8 \text{ mm}$ , $l_2 = 2 \text{ mm}$ ,壁厚  $t = 1 \text{ mm}$ ;C 为质量单元,质量  $m = 0.1 \text{ kg}$ ,材质为铅,尺寸  $l_1 = 3 \text{ mm}$ ;D 为弹簧(包括竖直弹簧和倾斜弹簧,刚度分别为  $k_1 = 10000 \text{ N/m}$  和  $k_2 = 8000 \text{ N/m}$ ),弹簧端部与质量块和框架、框架与基板均采用胶接的方式连接.无外力作用下,取系统的平衡态位置为初始静平衡位置,此时,倾斜弹簧处于水平位置,其压缩后的长度为  $d$ ,原长为  $l$ ,竖直弹簧的压缩力与质量块重力相平衡.声学超材料板的相关材料参数(密度、杨氏模量和泊松比)列于表 1.

表 1 材料参数

Table 1. Material parameters.

Material	$\rho / (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$E / (10^{10} \text{ Pa})$	Poission ratio
Aluminum	2700	7	0.33
Steel	7780	21.06	0.3
Epoxy resin	1150	0.435	0.38
Plumbum	11600	40.8	0.369

如图 1(c) 所示,在  $z$  方向施加外力  $F$  时,质量块相较于初始静平衡位置的位移为  $z$ ,二者间的关系为

$$F = k_1 z - 4k_2(l - \sqrt{z^2 + d^2}) \frac{z}{\sqrt{z^2 + d^2}}. \quad (1)$$

其无量纲形式为

$$\bar{F} = \bar{z} - 4\gamma \left[ \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\delta})^2 + \bar{z}^2}} - 1 \right] \bar{z}, \quad (2)$$

其中,  $\bar{z} = \frac{z}{l}$  为质量块的无量纲位移,  $\gamma = \frac{k_2}{k_1}$  为弹簧的刚度比,  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{l}$  为倾斜弹簧的无量纲预压缩量

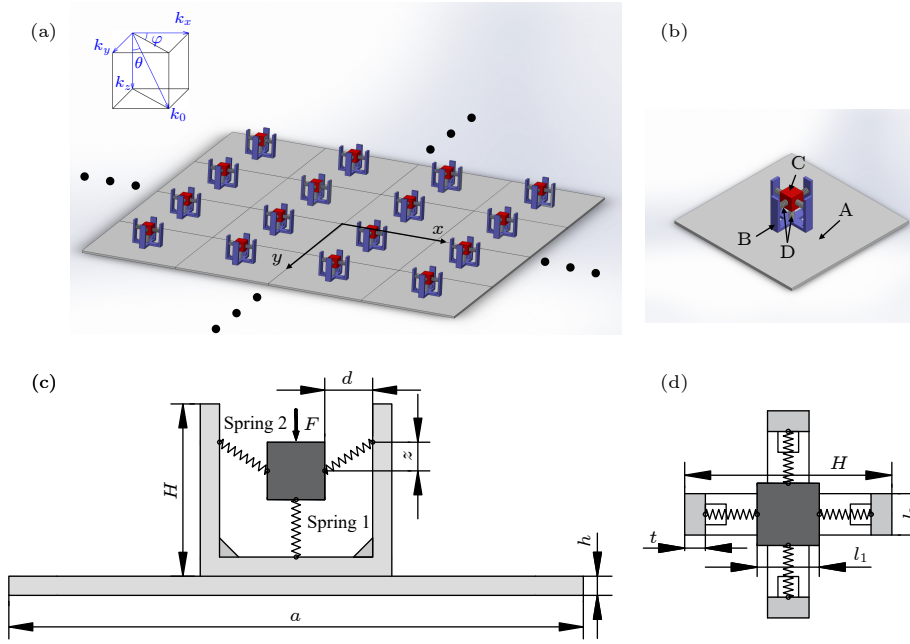


图 1 准零刚度局域共振结构<sup>[25]</sup> (a) 结构示意图; (b) 单胞结构; (c) 主要几何参数; (d) 准零刚度单元俯视图

Fig. 1. Quasi-zero stiffness local resonance structure<sup>[25]</sup>: (a) Schematic of whole structure; (b) unit cell; (c) main geometric parameters; (d) top view of quasi-zero stiffness element.

(以下简称预压缩量),  $\delta = l - d$  为倾斜弹簧的初始预压缩量,  $\bar{F} = \frac{F}{k_1 l}$  为归一化恢复力. 根据外力-变形关系可得准零刚度系统的归一化等效刚度, 即:

$$\bar{k}_{\text{eff}} = \frac{k_{\text{eff}}}{k_1} = 1 - 4\gamma \left\{ \frac{(1 - \delta)^2}{[(1 - \delta)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} - 1 \right\}. \quad (3)$$

由 (2) 式和 (3) 式可见, 准零刚度系统归一化恢复力和等效刚度均与结构力学参数密切相关, 图 2 给出了归一化恢复力和等效刚度随预压缩量和刚度比的影响规律曲线. 具体讨论如下:

1) 如图 2(a) 和图 2(b) 所示, 保持刚度比  $\gamma = 0.4$  不变, 调节弹簧的预压缩量  $\delta$  可显著影响恢复力, 进而使静平衡位置处的系统等效刚度减小至 0 乃至负值. 具体而言,  $\delta = 0$  时, 归一化等效刚度为 1 (即  $\bar{k}_{\text{eff}} = 1$ ), 准零刚度谐振单元等效刚度与竖直弹簧刚度  $k_1$  相等, 倾斜弹簧的负刚度效应可忽略不计;  $\bar{\delta}_0 \approx 0.385$  时,  $\bar{k}_{\text{eff}} = 0$ ;  $0 < \delta \leq \bar{\delta}_0$  时,  $0 \leq \bar{k}_{\text{eff}} < 1$ , 即实现了系统的动态刚度小于静刚度的目标; 继续增大预压缩量使  $\bar{\delta}_0 < \delta < 1$ , 系统的等效刚度可为负值, 即实现了负刚度的效果.

2) 调节弹簧的刚度比  $\gamma$  产生类似效果. 保持预压缩量  $\delta = 0.2$  不变, 图 2(c) 和图 2(d) 分别给出归一化恢复力和等效刚度随  $\gamma$  的变化趋势. 可以看出, 增大  $\gamma$  可使  $\bar{k}_{\text{eff}}$  减小为 0 乃至负值, 例如  $\gamma = 1$  时,

$\bar{k}_{\text{eff}} = 0$ . 相关变化规律与预压缩量类似, 不再赘述.

## 2.2 隔声理论

小扰动线性声波激励下, 薄板的弯曲响应属于微幅振动. 就图 1 所示模型而言, 薄板振动引起的质量块位移极小, 准零刚度系统局域共振结构近似处于静平衡位置, 则其归一化等效刚度 ((3) 式) 可线性化为

$$\bar{k}_{\text{eff}} = 1 - 4\gamma \frac{\delta}{1 - \delta}. \quad (4)$$

本文考虑的低频声波频率范围为 1—1000 Hz, 故超材料元胞尺寸与最小波长比  $a/\lambda_{\text{min}} \approx 0.073$ , 满足长波假设 ( $a < \lambda/10$ ), 可近似将元胞视为一集中质量, 其动态等效质量为<sup>[26]</sup>

$$m_{\text{eff}} = \rho S h + k_{\text{eff}}/(\omega_0^2 - \omega^2), \quad (5)$$

其中,  $\omega_0 = \sqrt{k_{\text{eff}}/m}$  和  $\omega$  分别为局域振子固有角频率和入射声波角频率.

元胞内的框架仅起支撑作用, 其质量远小于基板, 根据等效介质理论, 考虑框架结构的等效可忽略 (等效密度不足基板的 1/10), 同时质量块尺寸约为基板尺寸的 1/10, 对声场的扰动较小, 故可忽略其对隔声的影响. 将元胞的其余部分等效为与基板等厚度的均质板材料, 则均质板材的等效密度为



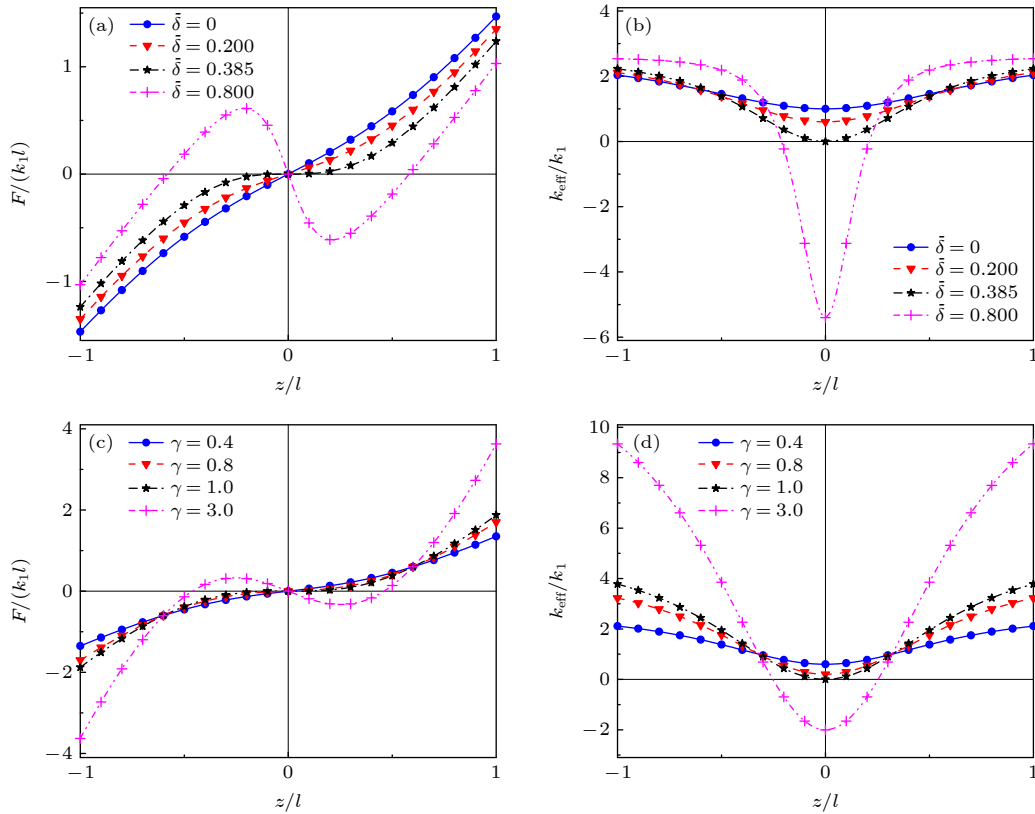


图 2 弹簧刚度比保持不变 ( $\gamma = 0.4$ ), (a) 归一化恢复力和 (b) 等效刚度随弹簧预压缩量的变化趋势; 弹簧预压缩量保持不变 ( $\bar{\delta} = 0.2$ ), (c) 归一化恢复力和 (d) 等效刚度随弹簧刚度比的变化趋势

Fig. 2. (a) Normalized reacting force and (b) equivalent stiffness plotted as functions of pre-compression of springs for  $\gamma = 0.4$ ; (c) normalized reacting force and (d) equivalent stiffness plotted as functions of spring stiffness ratio for  $\bar{\delta} = 0.2$ .

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{m_{\text{eff}}}{Sh} = \rho + \frac{\rho_t}{1 - \omega^2/\omega_0^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

其中,  $S$  为元胞面积,  $h$  为厚度,  $\rho_t = \frac{m}{Sh}$ .

假设入射声波为平面简谐波, 即

$$p_{\text{in}} = p_i e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}. \quad (7)$$

相应的反射波、透射波及超材料板横向位移可分别表示为

$$\begin{aligned} p_{\text{re}} &= p_r e^{-j(k_x x + k_y y - k_z z - \omega t)}, \\ p_{\text{tr}} &= p_t e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}, \\ w &= W e^{-j(k_x x + k_y y - \omega t)}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $p_i$ ,  $p_r$ ,  $p_t$  和  $W$  为入射声压幅值、反射声压幅值、透射声压幅值和超材料板的横向位移幅值;  $k_x$ ,  $k_y$  和  $k_z$  是  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的波矢, 由下式给出:

$$k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi, \quad k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad k_z = k_0 \cos \theta, \quad (9)$$

式中,  $k_0 = \omega/c_0$  为波数,  $c_0$  为声速,  $\theta$  为入射角,  $\varphi$  为方位角.

基于无能量损失、静态、连续、均匀理想介质等假设, 声场介质受扰动的动力学方程为

式中,  $\rho_0$  为空气密度,  $v$  为声质点速度.

板两侧界面的声质点速度与板质点速度连续. 将 (7) 式和 (8) 式代入 (10) 式中, 可得

$$z = 0, \quad -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial(p_{\text{in}} + p_{\text{re}})}{\partial z} = j\omega w, \quad -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p_{\text{tr}}}{\partial z} = j\omega w. \quad (11)$$

将 (7) 式和 (8) 式代入 (11) 式中, 可得反射声压幅值和透射声压幅值分别为

$$p_r = p_i - \frac{j\rho_0\omega^2}{k_z} W, \quad p_t = \frac{j\rho_0\omega^2}{k_z} W. \quad (12)$$

基于 Kirchhoff 经典薄板假设<sup>[27]</sup>, 等效超材料板的声振耦合控制方程可表示为

$$D\nabla^4 w - \rho_{\text{eff}} h \omega^2 w = p_{\text{in}}|_{z=0} + p_{\text{re}}|_{z=0} - p_{\text{tr}}|_{z=0}, \quad (13)$$

式中  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  为弯曲刚度, 其中  $E$  为基体杨氏模量,  $\nu$  为泊松比;  $\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2$  为二重 Laplace 算子.

将 (8) 式和 (12) 式代入 (13) 式中, 可得横向位移幅值:

$$W = \frac{2p_i}{D(k_0 \sin \theta)^4 - \rho_{\text{eff}} h \omega^2 + 2j\rho_0 c_0 \omega / \cos \theta}. \quad (14)$$

将 (14) 式代入 (12) 式中, 可得透射声压幅值:

$$p_t = \frac{2j\rho_0 c_0 \omega / \cos \theta}{D(k_0 \sin \theta)^4 - \rho_{\text{eff}} h \omega^2 + 2j\rho_0 c_0 \omega / \cos \theta}. \quad (15)$$

斜入射条件下, 结构的反射系数和透射系数分别为

$$Re = |p_r|^2 / |p_i|^2, \quad \tau = |p_t|^2 / |p_i|^2. \quad (16)$$

采用传输损失 (sound transmission loss) 评价隔声性能, 定义变量  $TL$  如下:

$$TL = 10 \log_{10}(1/\tau). \quad (17)$$

### 2.3 有限元模型

利用超材料板的周期性, 建立如图 3 所示的有限元模型开展数值仿真, 计算其反射系数、透射系数和传输损失等声学特性, 以验证理论模型的准确性. 模型整体采用实体化建模, 计算域分三部分, 其中 I 为入射声场、II 为超材料板固体域、III 为透射声场, 声场介质为空气. 定义  $S_1$  和  $S_2$  所在两端域为完美匹配层, 完美匹配层尺寸  $M = 0.5a$ , 同时定义 I, II, III 和完美匹配层域的四周为 Floquet 周期性边界以模拟无限大结构. 采用声-结构耦合模块, 谐振单元则采用集总机械系统建模 (见图 3(b)), 节点 1 和节点 2 之间为等效弹簧, 节点 2 和节点 3 之间为质量块, 节点 1 与基板中心耦合传递力与位移, 节点 3 为自由节点. 为保证计算精度, 计算域尺度取  $L = 4a$ , 声场网格最大单元尺寸取声波最小波长的  $1/6$ , 固体域采用自由四面体网格, 同时对超材料板的界面网格进行加密.

反射系数  $R$  和透射系数  $T$  的定义分别为

$$R = \frac{\int_{S_1} p_{\text{re}} dS}{\int_{S_1} p_{\text{in}} dS}, \quad T = \frac{\int_{S_2} p_{\text{tr}} dS}{\int_{S_1} p_{\text{in}} dS}, \quad (18)$$

其中,  $p_{\text{in}}$  为  $S_1$  平面入射声压,  $p_{\text{re}}$  为  $S_1$  平面反射声压,  $p_{\text{tr}}$  为  $S_2$  平面透射声压.

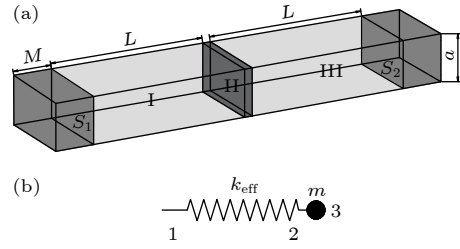


图 3 周期性元胞有限元模型 (a) 有限元模型; (b) 集总机械系统原理图

Fig. 3. Finite element model of periodic cell: (a) Finite element model; (b) schematic diagram of lumped mechanical system.

因此, 在有限元软件中, 传输损失变量  $TL$  的定义如下:

$$W_{\text{in}} = \int_{S_1} \frac{p_{\text{in}}^2}{2\rho_0 c_0} dS, \quad W_{\text{tr}} = \int_{S_2} \frac{p_{\text{tr}}^2}{2\rho_0 c_0} dS, \quad (19)$$

$$TL = 10 \log_{10}(W_{\text{in}}/W_{\text{tr}}),$$

其中,  $W_{\text{in}}$  和  $W_{\text{tr}}$  分别为入射声功率和透射声功率,  $TL$  的单位为分贝.

## 3 数值仿真与讨论

### 3.1 隔声机理

采用理论计算和数值模拟, 分析了三种结构的隔声性能, 包括: 1) 准零刚度局域共振型声学超材料板 (quasi zero stiffness plate, QZS); 2) 传统弹簧振子板 (mass spring plate, MSP); 3) 无振子板 (non-oscillator plate, NOP). 假设声激励的入射角  $\theta = 60^\circ$ , 方位角  $\varphi = 0^\circ$ , 入射声压幅值  $p_i = 1 \text{ Pa}$ , 空气的密度  $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ , 声速  $c_0 = 343 \text{ m/s}$ , 计算所用结构参数如表 2 所列.

图 4 给出三种板结构的隔声曲线, 可见本文理论模型 (equivalent medium method, EMM) 结果与数值仿真 (finite element method, FEM) 结果非常符合, 验证了理论模型的正确性. 对比三种结构

表 2 三种声学板结构的结构参数

Table 2. Structural parameters of the three structures.

Model	$a/\text{mm}$	$h/\text{mm}$	$k_1/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	Stiffness ratio	Pre-compression	$m/\text{kg}$
QZS	25	4	10000	0.8	0.2	0.1
MSP	25	4	10000	0	0	0.1
NOP	25	4	0	0	0	0

的隔声效果发现, 基体参数保持一致的情况下, 准零刚度超材料板和传统弹簧振子板在低频段的隔声效果更好, 前者还可显著降低局域共振频率. 预压缩量调节为  $\delta = 0.2$  时, 准零刚度超材料板的局域共振频率为 22.5 Hz, 较传统弹簧振子板 (50 Hz) 减小了一半, 故更具优势.

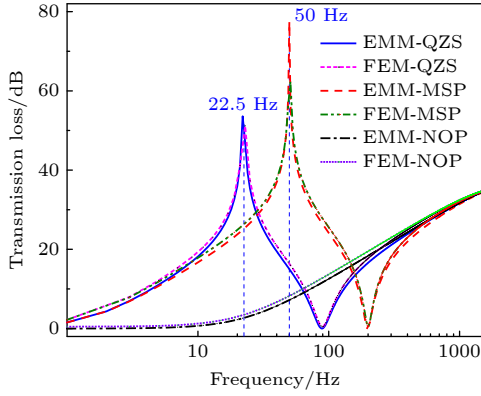


图 4 三种声学板结构的传输损失: 理论预测与数值模拟对比  
Fig. 4. Comparison of sound transmission loss among three different plate structures: Analytical model prediction versus numerical simulation.

为进一步分析准零刚度超材料板的隔声机理, 图 5(a) 给出三种声学板结构的等效质量面密度. 特定频率下, 相较于无振子板, 准零刚度超材料板和传统弹簧振子板均可显著增加系统的等效动态质量面密度, 进而实现低频段的超常隔声效果. 图 5(a) 中蓝实线显示, 在 22.5 Hz 附近 (图 4 中的隔声峰处), 准零刚度超材料板的等效质量面密度趋于无穷. 结合 (6) 式可知, 此时入射声激励频率与准零刚度谐振单元的固有频率一致 (即  $1 - \omega^2/\omega_0^2 \rightarrow 0$ ), 局域共振单元发生共振. 振子在平衡位置上下往复剧烈振动, 导致声能集中于谐振单元. 此时, 结合图 5(b) 三种结构的反射系数曲线可知, 准零刚度超材料板的反射系数趋近于 1, 声波呈现近乎完美的全反射, 和图 6(a) 的声压云图反映一致. 在局域共振处, 图 5 结果还显示等效质量面密度趋于无穷, 且由正变负. 负的等效质量密度表明其具有偶极子振动模式 (见图 5(a)), 此时弹簧振子相当于一质量块, 局域共振时, 质量块与薄板反相位振动, 系统总的外力与总的加速度反相, 故产生负的等效质量密度. 从振幅上看, 图 5(a) 表明在局域共振附近, 振子的振幅相比薄板更大, 吸收了基板的能量, 从而表现出超乎寻常的隔声效果.

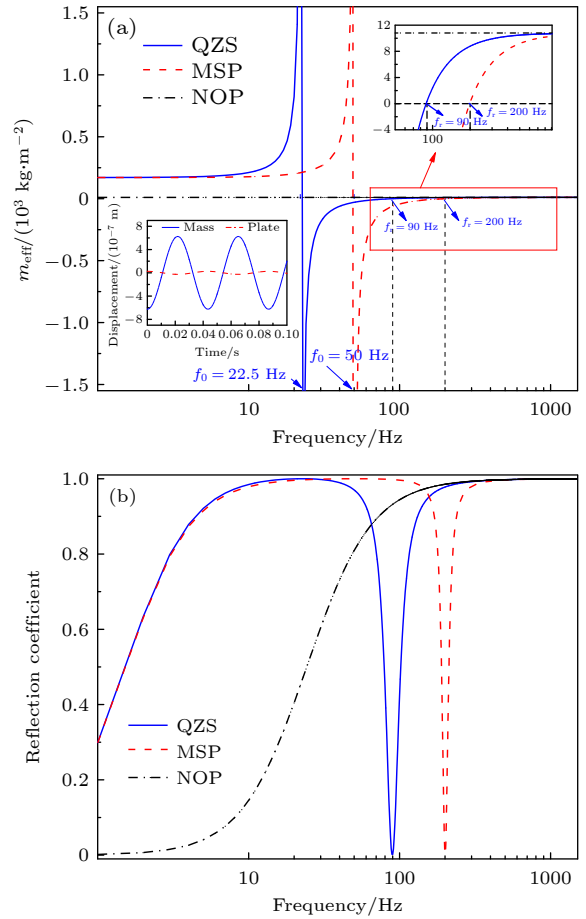


图 5 三种板结构对比 (a) 等效质量面密度和超材料板的偶极子振动模式; (b) 反射系数  
Fig. 5. Comparison among three different plate structures: (a) Equivalent mass surface density and dipole vibration mode of QZS; (b) reflection coefficient.

图 5(a) 的蓝实线表明, 在 90 Hz 处, 准零刚度超材料板的等效质量面密度为零, 趋近于图 4 中的隔声谷频率. 根据弹性波理论, 结构弯曲波的波数为

$$k_{\text{eq}} = \left( \omega^2 \frac{\rho_{\text{eff}} h}{D} \right)^{1/4}. \quad (20)$$

同时, (15) 式适当变形后的表达式为

$$\tau = \left| \frac{2\rho_0 c_0 / \cos \theta}{D(k_0 \sin \theta)^4 / \omega - \rho_{\text{eff}} h \omega + 2j\rho_0 c_0 / \cos \theta} \right|^2. \quad (21)$$

(21) 式表明,  $D(k_0 \sin \theta)^4 / \omega - \rho_{\text{eff}} h \omega = 0$  时, 透射系数趋近于 1, 结合图 5(b) 的蓝实线, 此时的声波几乎全透射, 和图 6(b) 的声压云图反映一致. 在局域共振频率处产生局域共振带隙, 导致结构弯曲波波数与入射声波波数沿板面的投影相等 (即  $k_{\text{eq}} = k_0 \sin \theta$ ), 由此激发结构内的本征弯曲波. 这种弯曲

振动与空气之间发生强烈的声耦合, 从而在透射端辐射出强烈的声能量, 该现象也称局域共振引起的低频“吻合效应”<sup>[28]</sup>, 此时出现隔声谷值现象. 值得注意的是, 虽然这种吻合效应类似于普通板结构(不带振子)在声波斜入射激励下的吻合效应<sup>[29]</sup>, 但区别在于这是由于附加振子改变了板结构的等效质量密度, 导致出现新的吻合效应.

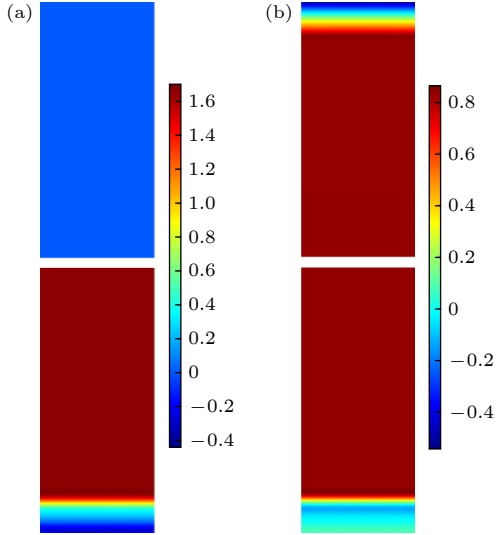


图 6 声压云图(单位: Pa) (a) 22.5 Hz; (b) 90 Hz  
Fig. 6. Sound pressure cloud diagram (unit: Pa): (a) 22.5 Hz; (b) 90 Hz.

### 3.2 参数调控

如前所述, 调节弹簧的刚度比或预压缩量, 均可使准零刚度单元的等效动刚度从正变化为负. 首先, 基于理论计算, 讨论等效动刚度为正的情形. 分别固定预压缩量和刚度比, 选取五种参数组合开展讨论, 具体调控参数见表 3, 其余参数与前文保持不变, 图 7(a) 和图 7(b) 给出相应的隔声曲线. 保持预压缩量  $\bar{\delta} = 0.2$  不变, 增大刚度比可使局域共振频率向低频移动. 在 39 Hz 局域共振频率处, 峰值隔声量达 80 dB, 具有显著隔声效果. 类似地, 固定刚度比  $\gamma = 0.4$  不变, 当预压缩量  $\bar{\delta} = 0.376$  时, 局域共振频率降低为 10 Hz, 隔声量达 30 dB, 实现了 20 Hz 以下的超低频隔声. 总体而言, 在正等效刚度范围内, 增大预压缩量或刚度比均可使局域共振频率向低频偏移. 相较于刚度比, 系统对预压缩量的敏感度更高, 且后者更易于调节.

其次, 讨论等效动刚度为负的情形; 选取的四种代表参数列于表 4, 其余参数仍与前文保持不变, 计算结果见图 8. 可以看出, 在结构的负刚度区, 可

实现低频大宽带隔声效果. 刚度比或预压缩量越大, 隔声效果越好, 且整个频段未出现明显的隔声峰值及谷值.

表 3 准零刚度单元在正等效刚度区的调节参数  
Table 3. Selected values of spring stiffness and pre-compression in the regime of positive equivalent stiffness.

Group	$k_1 / (\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	Stiffness ratio	Pre-compression
Case1	10000	0.4	0.2
Case2	10000	0.6	0.2
Case3	10000	0.8	0.2
Case4	10000	0.4	0.3
Case5	10000	0.4	0.376

表 4 准零刚度单元在负等效刚度区的调节参数  
Table 4. Selected values of spring stiffness and pre-compression in the regime of negative equivalent stiffness.

Group	$k_1 / (\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	Stiffness ratio	Pre-compression
Case1	10000	2.0	0.2
Case2	10000	3.0	0.2
Case3	10000	0.8	0.4
Case4	10000	0.8	0.8

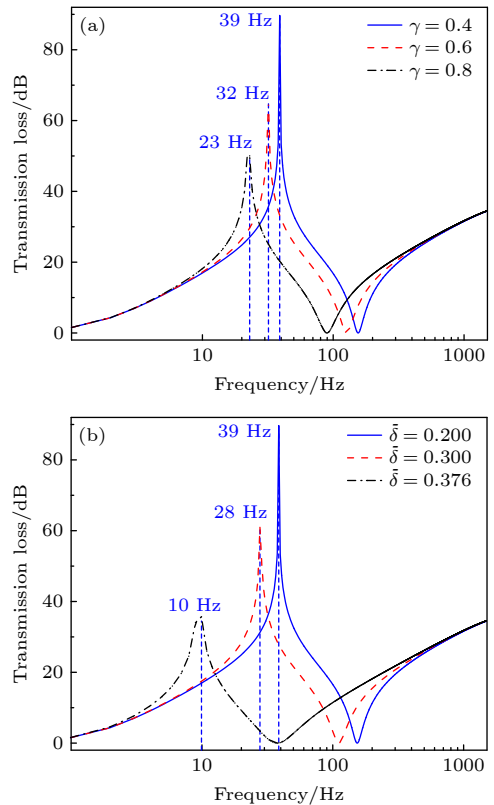


图 7 正刚度区传输损失对比 (a) 刚度比的影响 ( $\bar{\delta} = 0.2$ ); (b) 预压缩量的影响 ( $\gamma = 0.4$ )

Fig. 7. Comparison of transmission loss versus frequency curves in positive equivalent stiffness zone: (a) Influence of stiffness ratio at  $\bar{\delta} = 0.2$ ; (b) influence of pre-compression at  $\gamma = 0.4$ .

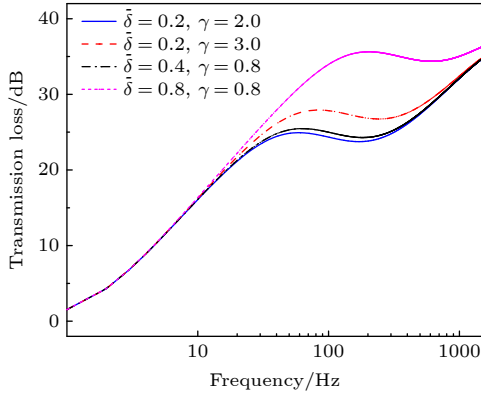


图 8 负刚度区传输损失对比

Fig. 8. Comparison of transmission loss versus frequency curves in negative equivalent stiffness zone.

进一步,在正/负等效刚度区,图 9(a)对比了准零刚度超材料板和无振子板的隔声曲线.结果显示,在正等效刚度区( $\bar{\delta} = 0.2$ 且 $\gamma = 0.8$ ),虽然超材料板可实现任意低频段的超常隔声,但仅在局域共振频率附近隔声效果良好,且由于出现低频“吻合效应”,引发显著的隔声谷值现象,低频隔声的有效带宽较窄.与此相反,在负等效刚度区( $\bar{\delta} = 0.8$ 且 $\gamma = 0.8$ ),超材料板不产生局域共振现象及低频“吻合效应”,可实现低频大宽带的隔声目标.相较于无振子板,处于负等效刚度区的超材料板可在 53—1500 Hz 的宽带范围产生大于 30 dB 的隔声量,优势明显.需要强调的是,传统弹簧振子板无法通过改变弹簧刚度和质量实现负等效刚度效应,该效应是本文提出的准零刚度超材料板的独有特性.

为进一步分析负刚度区的低频大宽带隔声机理,图 9(b)对比了超材料板和无振子板的等效声阻抗率和反射系数,其中等效声阻抗率定义如下:

$$Z = \frac{p}{\dot{w}} = -i \frac{D(k_0 \sin \theta)^4 - \rho_{\text{eff}} h \omega^2}{\omega}. \quad (22)$$

图 9(b)中蓝实线、红虚线和黑点划线分别表示正刚度区超材料板、负刚度区超材料板和无振子板的等效声阻抗率.结果表明,在 53—1500 Hz 的大宽带范围,负刚度区超材料板的声阻抗率远大于空气:  $Z/Z_0 \geq 128$ ,其中  $Z_0 = \rho_0 c_0 = 408 \text{ Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ ,为空气的声阻抗率.

图 9(b)给出的结果还表明,相较于超材料板在正刚度区的反射系数(图中的绿双点划线),负刚度区的反射系数(紫双虚线)呈现大宽带反射效果.这种由于阻抗失配引起的声波近乎全反射,在中低

频范围极大拓宽了隔声带宽,为低频大宽带隔声提供了新的思路.

图 10 给出了 QZS 模型在不同声波入射角下的隔声响应曲线.结果表明,随着入射角的增大,传输损失会减小;入射角不影响局域共振频率,

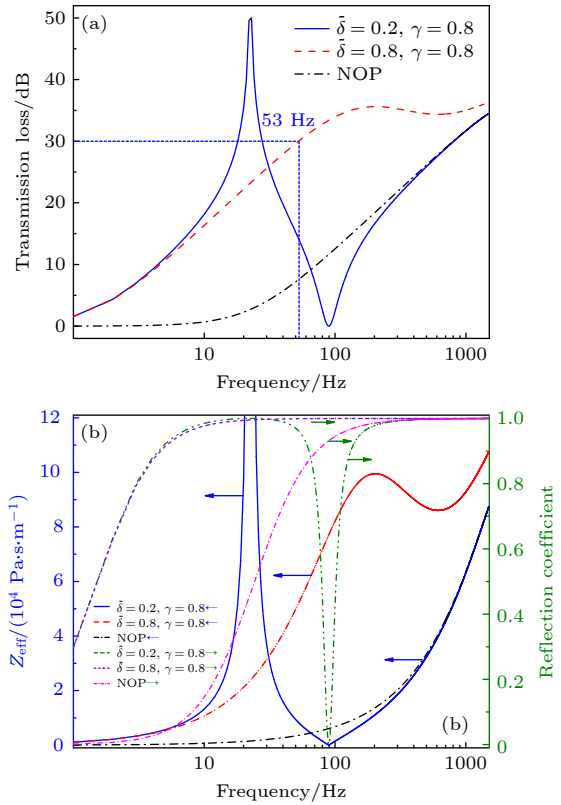


图 9 正/负等效刚度区超材料板和无振子板对比 (a) 传输损失; (b) 等效阻抗和反射系数

Fig. 9. Metamaterial plate compared with non-oscillator plate in both positive regime ( $\bar{\delta} = 0.2$  and  $\gamma = 0.8$ ) and negative regime ( $\bar{\delta} = 0.8$  and  $\gamma = 0.8$ ) of equivalent stiffness: (a) Transmission loss; (b) equivalent impedance and reflection coefficient.

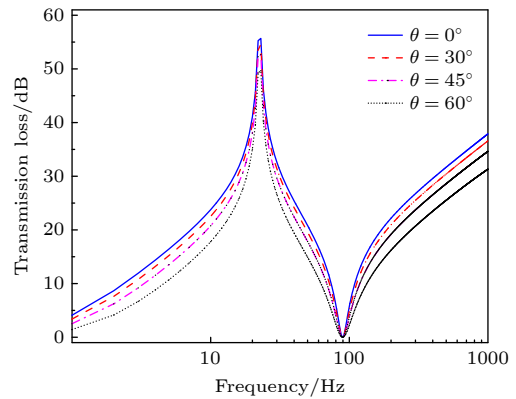


图 10 传输损失随入射角变化曲线

Fig. 10. Comparison of transmission loss under different incident angle.



对低频吻合频率的影响可忽略. 局域共振频率 (对应隔声峰值) 只与等效刚度和质量块质量相关, 低频吻合频率 (对应隔声谷值) 近似为等效质量密度零值点. 由 (6) 式等效密度为零, 可得谷值频率近似为  $f_r = f_0 \sqrt{1 + m/M}$ , 两者均与入射角无关, 总的来说, 入射角度对基于无限大周期模型的 QZS 模型隔声结果影响较小.

#### 4 实验验证

为进一步验证理论及仿真计算的正确性, 采用图 11(a) 所示 BSWA SW422 阻抗管开展实验, 基于 VA-Lab 测试系统及传递函数法, 分别对有限大四振子超材料板及无振子板样件在 63—1600 Hz 频段内的传输损失进行测试. 为减少试验结果的离散性误差, 采用 12 组实验结果取平均. 阻抗管的管径为 100 mm, 将四个准零刚度谐振单元黏合于圆形铝板, 如图 11(b) 所示. 谐振单元中的质量块和框架均采用环氧树脂材料 3D 打印而成, 由于质量块的质量过小, 所以在质量块上附加铅块; 铝材的密度为 2700 kg/m<sup>3</sup>, 泊松比为 0.3, 杨氏模量为 70 GPa, 厚度为 2 mm; 四个谐振单元的力学参数列于表 5,  $k_1$  为竖直弹簧刚度,  $k_2$  为倾斜弹簧刚度, 将样件四周用生料带进行边缘密封, 然后将其安装在阻抗管内, 如图 11(c) 所示.

除了实验测试, 分别对有限大无振子板 (finite non-oscillator plate, F\_NOP) 和有限大四振子超

材料板 (finite quasi zero stiffness plate, F\_QZS) 进行仿真分析, 此处的仿真分析指的是在有限元软件里建立驻波管实验中对应的圆形有限大结构模型, 并非前文中的无限大周期结构模型. 此外, 可基于前文的无限大周期结构隔声理论对同晶格尺寸的 2 mm 厚无振子板和四振子超材料板模型进行垂直入射响应预测. 图 12 给出了有限大结构的实验及仿真结果 (红线和蓝线所示) 和基于无限大结构的理论结果 (黑线所示).

结果表明: 对于无振子板, 仿真和实验符合较好, 初步验证了测试方法的有效性, 理论和实验在 1400 Hz 频率以下的误差较大, 主要原因在于驻波管中的样品隔声性能主要受边界条件约束, 处于刚度控制区, 而理论解无法考虑边界影响. 对于有限大四振子超材料板, 图 12(b) 表明有限元仿真得到的局域共振频率与实际测量值基本一致 (见表 5), 其中谐振单元 A 与 B 相比, 增大刚度比会使局域共振频率减小; 同样谐振单元 C 与 D 相比, 增大预压缩也可使局域共振频率减小, 验证了本文理论模型的正确性. 实验与仿真结果之间的误差较无振子板大一些, 换句话说, 振子的引入增加了仿真和实验的误差, 误差主要来源于样件本身的加工误差、样件在阻抗管内的安装定位误差和测量误差. 理论结果可较为准确地捕捉到由于局域共振引起的四个隔声峰值, 但在其他频段和仿真及实验有较大差距, 主要原因同样在于无限大模型无法考虑结构有限尺寸带来的边界效应.

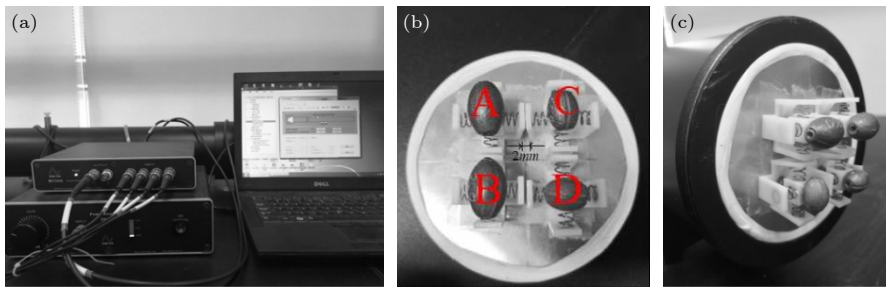


图 11 (a) 实验装置; (b) 超材料板样件; (c) 样件置于阻抗管内

Fig. 11. (a) Experimental facility; (b) metamaterial plate sample; (c) sample positioned in impedance tube.

表 5 有限大四振子超材料板的力学参数及局域共振频率

Table 5. Mechanical parameters and local resonance frequencies of finite four-oscillator metamaterial plate.

	$k_1/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$k_2/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	Pre-compression	$m/\text{g}$	Experiment $f_0/\text{Hz}$	FEM $f_0/\text{Hz}$
A	35137.8	11322.1	0.2	19.14	178	176
B	35137.8	1093.16	0.2	19.14	211	210
C	35137.8	11322.1	0.2	10.17	254	242
D	35137.8	11322.1	0.02	10.17	300	289

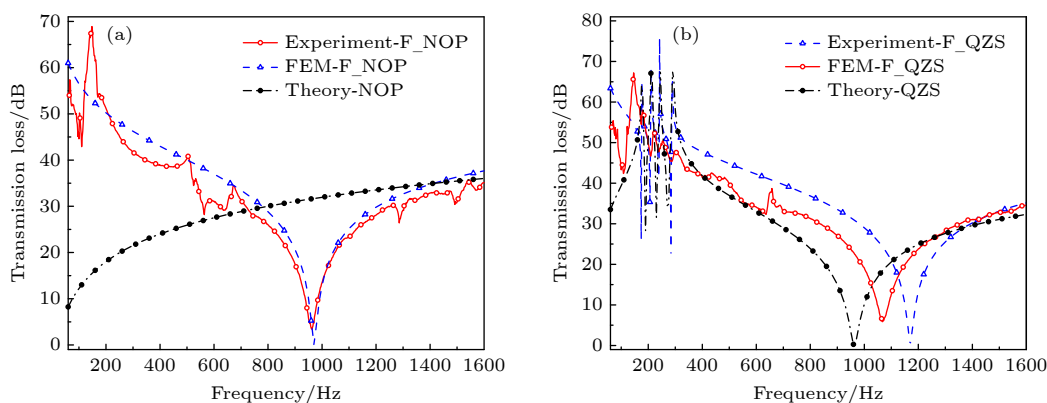


图 12 实验测量与数值仿真得到的传输损失对比 (a) 无振子板; (b) 4 振子超材料板

Fig. 12. Comparison of transmission loss between experimental measurement and numerical simulation: (a) Non-oscillator plate; (b) four-oscillator metamaterial plate.

## 5 结论

在传统弹簧-振子局域共振基础上, 本文并联倾斜弹簧负刚度机构, 首次提出一种准零刚度局域共振型声学超材料板, 通过调整组合弹簧的预压缩量和刚度比, 实现了低频宽频带有效隔声, 主要结论如下:

1) 准零刚度谐振单元的归一化等效刚度与力学结构参数密切相关, 增大刚度比或预压缩量, 均可在不改变谐振单元静刚度的前提下降低其等效动态刚度.

2) 在局域共振频率处, 准零刚度谐振单元发生谐振, 其等效质量面密度趋于无穷, 反射系数趋近于 1, 实现了声波近乎全反射, 隔声曲线上呈现峰值.

3) 局域共振频率附近, 结构弯曲波波数与入射声波波数沿板面投影相等, 引发低频“吻合效应”, 声波近乎全透射, 隔声曲线上呈现谷值.

4) 准零刚度谐振单元的等效动态刚度可正, 亦可负. 在正刚度区, 增大刚度比或预压缩量使局域共振频率向低频移动, 故可实现任意低频乃至超低频有效隔声; 在负刚度区, 谐振单元因不产生局域共振而避免了低频吻合效应, 故可实现低频大宽带隔声, 且刚度比或预压缩量越大, 隔声效果越好.

本文提出的准零刚度局域共振超材料结构不仅具有低频大宽带隔声的独有特性, 还克服了传统声学超材料需减小刚度或增大附加质量的不利特性, 未来可在此基础上进一步开展相关优化及设计研究.

## 参考文献

- [1] Tian Y, Ge H, Lu M H, Chen Y F 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 194301 (in Chinese) [田源, 葛浩, 卢明辉, 陈延锋 2019 *物理学报* **68** 194301]
- [2] Ma G C, Sheng P 2016 *Sci. Adv.* **2** e1501595
- [3] Ding C L, Dong Y B, Zhao X P 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 194301 (in Chinese) [丁昌林, 董仪宝, 赵晓鹏 2018 *物理学报* **67** 194301]
- [4] Liu Z Y, Chan C T, Sheng P 2005 *Phys. Rev. B* **71** 014103
- [5] Fang N, Xi D J, Xu J Y, Ambati M, Srituravanich W, Sun C, Zhang X 2006 *Nat. Mater.* **5** 452
- [6] Deng K, Ding Y Q, He Z J, Zhao H P, Shi J, Liu Z Y 2009 *J. Appl. Phys.* **105** 188505
- [7] Zhu X F, Liang B, Kan W W, Zou X Y, Cheng J C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 014301
- [8] Peng S S, He Z J, Jia H, Zhang A Q, Qiu C Y, Ke M Z, Liu Z Y 2010 *Appl. Phys. Lett.* **96** 263502
- [9] Mei J, Ma G C, Yang M, Yang Z Y, Wen W J, Sheng P 2012 *Nat. Commun.* **3** 756
- [10] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022
- [11] Liu Z Y, Zhang X, Mao Y, Zhu Y Y, Yang Z, Chan C T, Sheng P 2000 *Science* **289** 1734
- [12] Zhang J L, Yao H, Du J, Zhao J B, Dong Y K, Qi P S 2016 *J. Chin. Ceramic Soc.* **44** 1440 (in Chinese) [张佳龙, 姚宏, 杜军, 赵静波, 董亚科, 祁鹏山 2016 *硅酸盐学报* **44** 1440]
- [13] Zhang S W, Wu J H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 134302 (in Chinese) [张思文, 吴九汇 2013 *物理学报* **62** 134302]
- [14] Zhang Y Y, Wu J H, Zhong H M 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 094301 (in Chinese) [张永燕, 吴九汇, 钟宏民 2017 *物理学报* **66** 094301]
- [15] Zhang R J, Xiao Y, Wen J H, Yu D L 2016 *J. Vib. Eng.* **29** 905 (in Chinese) [张若军, 肖勇, 温激鸿, 郁殿龙 2016 *振动工程学报* **29** 905]
- [16] Qiao H, He Z, Zhang H K, Peng W C, Jiang W 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 128101 (in Chinese) [乔厚, 何铮, 张恒堃, 彭伟才, 江雯 2019 *物理学报* **68** 128101]
- [17] Mei J, Yang M, Yang Z Y, Chen A X, Shen P 2010 *Physics* **39** 243 (in Chinese) [梅军, 杨旻, 杨志宇, 陈傲轩, 沈平 2010 *物理* **39** 243]
- [18] He Z H, Zhao J B, Yao H, Chen X 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 214302 (in Chinese) [贺子厚, 赵静波, 姚宏, 陈鑫 2019 *物理学报* **68** 214302]

- [19] He Z H, Zhao J B, Yao H, Jiang J N, Chen X 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 134302 (in Chinese) [贺子厚, 赵静波, 姚宏, 蒋娟娜, 陈鑫 2019 物理学报 **68** 134302]
- [20] Xiao Y, Wen J H, Wen X S 2012 *J. Phys. D:Appl. Phys.* **45** 195401
- [21] Xiao Y, Wen J H, Wen X S 2012 *J. Sound Vib.* **331** 5408
- [22] Huang X C, Liu X T, Sun J Y, Zhang Z Y, Hua H X 2014 *J. Sound Vib.* **333** 1132
- [23] Carrella A, Brennan M J, Waters T P 2007 *J. Sound Vib.* **301** 678
- [24] Zheng Y S, Zhang X N, Luo Y J, Zhang Y H, Xie S L 2018 *Mech. Syst. Sig. Process.* **100** 135
- [25] Wang K, Zhou J X, Cai C Q, Xu D L, Ouyang H J 2019 *Appl. Math. Modell.* **73** 581
- [26] Zhang H 2016 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [张浩 2016 博士学位论文 (长沙: 国防科技大学)]
- [27] Du G H, Zhu Z M, Gong X F 2012 *Acoustic Basis* (Nanjing: Nanjing University Press) p71 (in Chinese) [杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬 2012 声学基础 (南京: 南京大学出版社) 第71页]
- [28] Li P 2014 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Beijing Institute of Technology) (in Chinese) [李佩 2014 博士学位论文 (北京: 北京理工大学)]
- [29] He L, Zhu H C, Qiu X J, Du G H 2006 *Acoustic Theory and Engineering Application* (Beijing: Science Press) p177 (in Chinese) [何琳, 朱海潮, 邱小军, 杜功焕 2006 声学理论与工程应用 (北京: 科学出版社) 第177页]

# Broadband low-frequency sound insulation performance of quasi-zero stiffness local resonant acoustic metamaterial plate<sup>\*</sup>

Xu Qiang-Rong<sup>1)</sup> Shen Cheng<sup>1)2)†</sup> Han Feng<sup>1)3)</sup> Lu Tian-Jian<sup>1)‡</sup>

1) (*State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing*

*University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*)

2) (*State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

3) (*Department of Function and Structure, Shanghai Aircraft Design and Research Institute, Shanghai 201210, China*)

( Received 28 June 2021; revised manuscript received 10 August 2021 )

## Abstract

For realizing the effective broadband insulation of sound at low frequencies, a novel local resonant acoustic metamaterial plate having quasi-zero stiffness is proposed. Based on the classical mass-spring local resonance model, a metastructure is constructed by introducing additional inclined springs with negative stiffness. First, the normalized equivalent stiffness of the quasi-zero stiffness structure is derived from the perspective of dynamics. Then, by employing the method of equivalent medium, a sound insulation model of the metastructure is established theoretically. For validation, numerical simulations as well as experimental measurements are carried out. It is demonstrated that in the positive (equivalent) stiffness regime, increasing either the stiffness ratio or pre-compression can significantly reduce the local resonance frequency of the metastructure, which exhibits the great insulation performance around the local resonance frequency. For a typical example, the proposed metastructure can achieve a transmission loss of 30 dB around 10 Hz. In contrast, within the negative stiffness regime, the metastructure does not exhibit local resonance, thus avoiding sound insulation valley caused by the “coincidence effect”. Compared with traditional materials or similar metamaterials, the proposed metastructure has significant advantages in sound insulation (e.g. more than 30 dB drop over a wide frequency band of 53–1500 Hz). By analyzing the equivalent mass density, reflection coefficient, and acoustic impedance ratio of the metastructure, the physical mechanism behind its superior insulation performance is further explored. The equivalent mass density changes from positive to negative and tends to infinity at the insulation peak. The insulation peak is attributed to a nearly perfect total reflection of sound wave caused by impedance mismatch, while the insulation valley is caused by low-frequency “coincidence effect” originating from the local resonance band gap. The using of the quasi-zero stiffness local resonance to achieve low-frequency broadband sound insulation overcomes the disadvantages of traditional metamaterials such as reduced stiffness or additional mass, thus becoming vastly attractive for constructing low-frequency broad band sound insulation structures.

**Keywords:** metamaterial, local resonance, quasi-zero stiffness, low frequency range, sound insulation

**PACS:** 43.20.+g, 43.40.+s, 43.60.+d, 63.20.–e

**DOI:** 10.7498/aps.70.20211203

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11502110, 11972185) and the Open Fund of the State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, China (Grant No. SV2018-KF-01).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [cshen@nuaa.edu.cn](mailto:cshen@nuaa.edu.cn)

<sup>‡</sup> Corresponding author. E-mail: [tjlu@nuaa.edu.cn](mailto:tjlu@nuaa.edu.cn)