

物理学报
Acta Physica Sinica
ISSN 1000-3290, CN 11-1958/O4

《物理学报》网络首发论文

题目：一种具有动态磁负刚度薄膜声学超材料的低频隔声特性
作者：胥强荣，朱洋，林康，沈承，卢天健
网络首发日期：2022-07-21
引用格式：胥强荣，朱洋，林康，沈承，卢天健. 一种具有动态磁负刚度薄膜声学超材料的低频隔声特性[J/OL]. 物理学报.
<https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1958.O4.20220721.1001.002.html>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

一种具有动态磁负刚度薄膜声学超材料的低频隔声特性*

胥强荣¹⁾²⁾ 朱洋¹⁾²⁾ 林康¹⁾²⁾ 沈承^{1)2)†} 卢天健^{1)2)†}

1) (机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京航空航天大学, 南京 210016)

2) (多功能轻量化材料与结构工信部重点实验室, 南京航空航天大学, 南京 210016)

摘要

为提升薄膜/板状结构的低频隔声特性, 本文提出一种具有动态磁负刚度的新型准零刚度薄膜声学超材料。首先, 应用等效磁荷理论推导了动态磁负刚度; 然后, 基于伽辽金法建立了有限尺寸下薄膜/板结构的隔声理论模型。通过理论分析、数值仿真及实验测试相结合的方法, 从结构模态、振动模式、平均速度、相位曲线、等效质量密度和等效弹簧-质量动力学模型等多个角度对其低频(1~1000 Hz)隔声机理开展了研究。结果表明: 在初始薄膜张力一定时, 减小磁间隙或增大剩余磁通密度均可增大动态磁负刚度, 进而减小隔声峰值频率, 增加隔声带宽, 实现了较宽频段下的有效低频隔声; 进一步, 当磁间隙大于第二临界磁间隙小于第一临界磁间隙时, 结构的一阶模态共振消失, 对应隔声谷值大幅提升, 显示出超宽频段的隔声效果。这种利用动态磁负刚度改善模态共振导致的低频隔声谷值的方法对薄膜/板型低频隔声超材料的设计具有重要的理论指导价值。

关键词: 薄膜声学超材料, 可调隔声, 磁力负刚度, 低频宽带

PACS: 43.20.+g, 43.40.+s, 43.60.+d, 63.20.-e

DOI:10.7498/aps.71.20221058

基金: 南京航空航天大学研究生科研与实践创新基金(xcxjh20210106)、国家自然科学基金(11502110, 11972185), 机械结构强度与振动国家重点实验室开放基金(SV2018-KF-01)资助的课题。

†通讯作者: E-mail: cshen@nuaa.edu.cn(沈承); tjlu@nuaa.edu.cn(卢天健)

1 引言

中高频噪声一般可利用吸音棉、穿孔板等结构吸收控制, 技术较为成熟^[1,2], 但低频噪声(20~400 Hz)的穿透能力强, 难以衰减, 一直是工程界的瓶颈难题。近年来, 声学超材料^[3](或超构材料)的提出和不断发展为低频噪声控制提供了新的解决思路。作为一种基于微结构思想设计的人工材料, 声学超材料相较于普通天然材料具有显著

不同的物理特性，包括声波的完美吸收^[4]、负折射和声聚焦^[5]、超透镜^[6]、声隐身^[7]等，有望在航空航天、国防等领域实现重要应用。

针对噪声控制，一般基于局域共振^[8]和 Bragg 散射^[9]这两大类物理机理构建声学超材料。Bragg 散射要求结构尺寸和所控制的波长在同一数量级，仅适用于高频情况；局域共振型结构具有亚波长尺度特性，可实现以小尺寸控制大波长，并突破天然材料质量定律的限制，故对低频噪声控制有更重要的应用价值。

按照结构形式，局域共振型声学超材料主要分为四类。一是 Helmholtz 共振腔型^[10]，利用颈部空气腔的振动特性实现在特定频率下的声波调控，其结构设计简单、应用广泛，但吸隔声带宽较窄，在实际工程应用中，往往需要与穿孔板、多孔材料组合使用或基于多频共振机理布置多频谐振腔。Nguyen 等^[11]基于紧凑组装缝式亥姆赫兹谐振器设计了一种用于同时兼顾低频宽频隔声和通风特性的亚波长消声器，通过理论和实验发现在目标工作频带 480~950 Hz 达到 30 dB 以上的传输损失；二是薄膜/薄板型^[12]，利用薄膜/薄板的振动特性，通过增加局域共振子结构实现声波的全反射或全吸收。Xiao 等^[13]通过在薄板上周期性附加局域共振子，构造了一种板状声学超材料，发现在低频范围具有超乎寻常的隔声效果；此外，还发现调制局域工作频率至吻合效应区，还可大幅提升吻合效应区的隔声量；三是折叠卷曲空间型^[14]，利用延伸壁面的摩擦阻力、流道变化引起的相位变化及腔体共振等特性，实现低频声波调控。Zhao 等^[15]提出了一种具有良好通风和厚度小的宽频隔声分形声学超材料，发现在反共振频率附近具有较高的反射系数导致较高的传输损耗；同时，随着分形阶数的增加，隔声频带增加，低频隔声显著；四是组合型^[16]，即上述结构的组合，利用耦合作用机理增大吸隔声带宽。Lin 等^[17]在传统夹层结构的面板上开孔并内插板状声学超材料，提出了一种复合共振夹层声学超材料，相比于传统的夹层结构，这种共振耦合具有更宽的隔声频带。薄膜/薄

板型声学超材料具有结构简单、重量轻、经济廉价、制备容易等特性，且在低频工作区间具有超常的隔声效果，故得到广泛关注^[18-22]。

薄膜型声学超材料的雏形可追溯到 2008 年 Yang 等^[23]提出的由弹性膜、附加质量和固定弹性膜的支撑框架组成的二维二组元结构：200~300 Hz 频段内，入射此结构的声波几乎被全反射，且整个结构具有负的等效质量密度，成功证明采用毫米厚度的轻薄结构可在低频段实现显著隔声，为低频降噪提供了全新的解决思路。2012 年，基于前人研究，Mei 等^[4]提出一种在低频段具有宽频超强吸声性能的暗声学超材料，将薄膜型声学超材料拓展到吸声领域。2020 年，Lu 等^[24]研究了附加质量块的形状和位置对隔声性能的影响，结果发现通过优化设计，可实现在隔声频段的拓展。2021 年，Li 等^[25]在薄膜上贴敷铁片并在外侧布置磁铁，通过调节磁铁与铁片之间距离实现薄膜张力的调控，进而实现任意频率下的良好隔声。总体而言，以薄膜附加质量块构建薄膜型声学超材料，虽可利用反共振机理实现低频超高隔声，但隔声效果和隔声带宽强烈依赖于膜结构的预张力及附加质量：张力越小，反共振频率越小，作用区间隔声量和隔声带宽越小；附加质量越大，反共振频率越小，作用区间隔声量和隔声带宽越大。

针对薄膜型声学超材料在低频隔声不显著的缺点，He 等^[26]设计了一种附加质量的薄膜底面 Helmholtz 腔隔声结构，基于有限元法评估了在 20~1200 Hz 频段内的传输损失，发现其低频隔声效果相较于单一的 Helmholtz 腔和薄膜声学超材料更好，但隔声带宽依然较窄。针对单个隔声峰、带宽窄等不足，Naify 等^[27]提出具有附加环质量的薄膜型声学超材料，通过在单个单元上布置多个环形质量块阵列的方式，实现了多峰隔声；但这种结构由于模态共振产生了离散的隔声波谷，且单个隔声带宽仍不够显著。因此，有必要探索新的物理机制，进一步改善传统薄膜声学超材料在有限尺寸下的低频隔声性能。

隔声和隔振在物理本质上具有一定的相似性，故隔振领域的相关研究成果也许可成为解决低频隔声难题的灵感源泉。事实上，低频隔振也一直是工程界重点关注的大难问题。目前，非线性准零刚度隔振器已成为隔振领域的研究热点，其基本思想是通过正负刚度机构并联，使组合刚度在静态足够大、动态足够小，即具有“高静低动”的特性，进而实现近似零频的隔振效果，具有显著的工程应用价值。负刚度结构设计是构建准零刚度结构的核心。目前，“屈曲梁系统”^[28]、“倾斜弹簧系统”^[29]和“磁负刚度系统”等^[30]是实现负刚度的主要形式。如何借鉴准零刚度隔振器的设计思想，构建新型隔声结构实现更好的低频隔声效果，是一个有趣且有重要工程应用价值的问题。

笔者首次利用倾斜弹簧将准零刚度概念引入隔声领域，提出一种准零刚度薄板型声学超材料^[31]，实现了较好的低频宽带隔声性能。有别于前文的尺寸无限大假设、倾斜弹簧及局域振子设计方案^[31]，本文基于动态磁负刚度结构，提出一种新型准零刚度薄膜型声学超材料，通过理论、仿真和实验相结合的研究方法，对其在有限尺寸下的低频调控机制和大宽带隔声机理进行分析和讨论，为反射型薄膜声学超材料提供新的设计方法和理念。

2 模型建立

2.1 准零刚度薄膜声学超材料

图 1 给出准零刚度薄膜型声学超材料 (Quasi zero stiffness membrane acoustic metamaterial, 简称: QZSMAMM) 的单元结构, 其中 (a) 为单胞模型, 主要由中心贴敷圆柱形磁铁 A 的矩形薄膜、起支撑作用的框架、外磁铁 B 和 C 三部分组成; 其中, B 和 C 通过螺柱固定于支撑框架。由于框架自身的弯曲刚度远高于薄膜结构, 理论建模中假设其为刚性体, 薄膜的边界约束近似为固定。(b) 为结构 xoy 中面图, 深色区为胶粘于框架的薄膜, 浅色区为悬空薄膜; (c) 为结构 yoz 中面图, 中空部分为空气,

(d) 为结构的简化模型，鉴于薄膜位移较小，磁铁 B 和 C 对磁铁 A 的作用简化为具有线性刚度的弹簧，称其为磁力弹簧。

QZSMAMM 结构的相关参数如下：悬空薄膜的边缘长度 $L_x = L_y = 40$ mm，弹性膜厚度 $t = 0.2$ mm，面密度 $\rho_{mem} = 0.24 \text{ kg/m}^2$ ；三个圆柱形磁铁的半径 $r_A = r_B = r_C = 3$ mm，厚度 $t_1 = 2$ mm，质量 $m_A = m_B = m_C = 441$ mg，面密度 $\rho_{mag} = 15.6 \text{ kg/m}^2$ 。静平衡位置，三个磁铁沿厚度方向充磁且 N 极均朝 z 方向，B、C 与 A 的质心间距（简称：磁间隙）为 $H = 4$ mm，A 受到的初始磁力为零，其重力由薄膜张力承载，假设薄膜的初始张力为 $T = 500$ N/m。

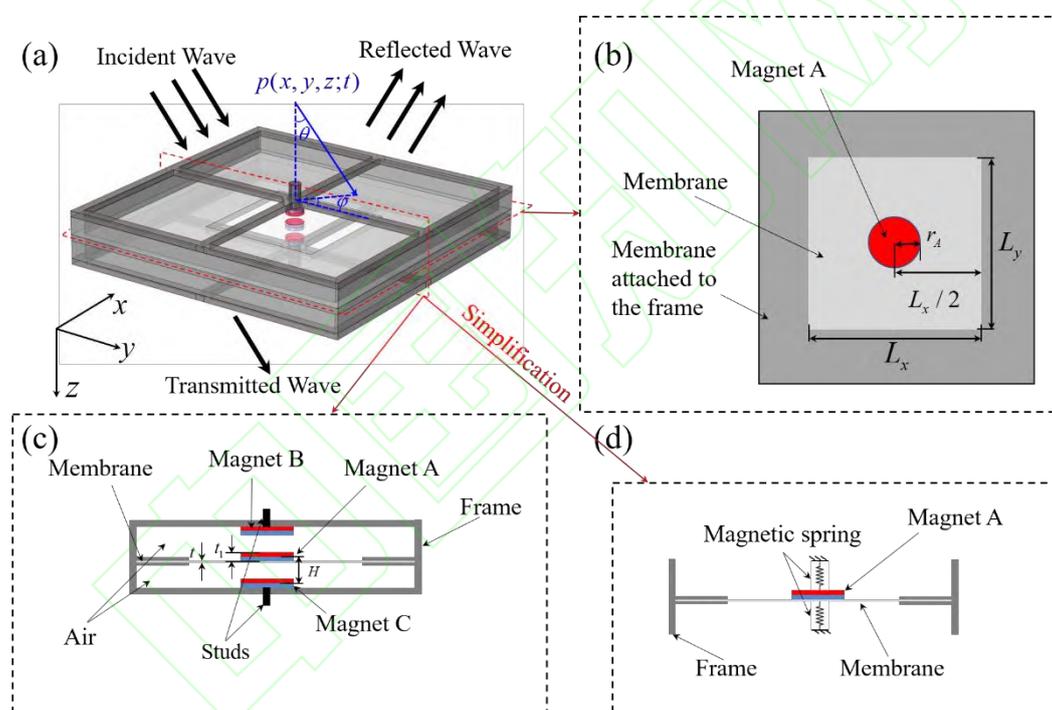


图 1 准零刚度薄膜声学超材料结构：(a)单胞模型；(b) xoy 中面图；(c) $yo z$ 中面图；(d)简化模型

Fig. 1. Unit cell of quasi-zero stiffness membrane acoustic metamaterial (QZSMAMM): (a) schematic of unit cell; (b) xoy mid-plane view; (c) $yo z$ mid-plane view; (d) simplified model.

2.2 动态磁负刚度

计算两磁体之间相互作用时，可采用有限元、分子电流模型、等效磁荷法等多种方法。本文采用 Akoun 和 Yonnet 结合等效磁荷理论给出的矩形磁铁之间作用力的解析模型^[32]。根据图 1 所示模型，将圆柱形磁铁等效为等面密度的矩形磁铁，边

长为 $l_x = l_y = \sqrt{\pi r_A^2}$ ，磁铁 A、B、C 的尺寸为 $l_x \times l_y \times t_1$ ，B 和 C 与支撑框架固定不动，声振耦合下 A 只在 z 方向受到扰动，故 A 只受到 B 和 C 在 z 方向的合力：

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{F}(z-H) + \mathbf{F}(z+H) \quad (1)$$

图 2 给出两矩形磁体的磁力计算模型，沿 z 方向的磁力分量为：

$$\mathbf{F}_z = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}'}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} \Phi(U_{ij}, V_{kl}, W_{pq}, r) \quad (2)$$

式中， μ_0 ($=4\pi \times 10^{-7}$) 是真空磁导率， \mathbf{J} 和 \mathbf{J}' 分别为上下磁体的极化强度（磁表面曲率为零时， \mathbf{J} 和剩余磁通密度 B_r 相等）， Φ 函数的定义如下：

$$\Phi(U, V, W, r) = -UW \ln(r-U) - VW \ln(r-V) + UV \arctan\left(\frac{UV}{rW}\right) - rW \quad (3)$$

其中， U, V, W, r 定义为：

$$\begin{aligned} U_{ij} &= x_0 + (-1)^j a' - (-1)^i a \\ V_{kl} &= y_0 + (-1)^l b' - (-1)^k b \\ W_{pq} &= z_0 + (-1)^q c' - (-1)^p c \\ r &= \sqrt{U_{ij}^2 + V_{kl}^2 + W_{pq}^2} \end{aligned} \quad (4)$$

(x_0, y_0, z_0) 为两磁体质心的相对坐标。根据图 1 所示几何模型，其质心相对坐标为 $(0, 0, H)$ 和 $(0, 0, -H)$ ，磁铁的边长 $a' = a = l_x/2$ ， $b' = b = l_y/2$ ， $c' = c = t_1/2$ 。

根据式 (1)，对其关于 z 求负导数得 $k = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = K(z-H) + K(z+H)$ ，其中的磁力刚度 K 为：

$$K = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}'}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} (2r + U \ln(r-U) + V \ln(r-V)) \quad (5)$$

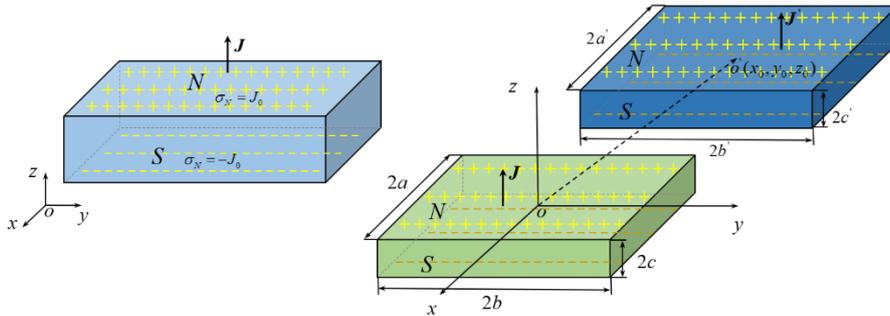


图 2 矩形磁铁的磁荷模型示意图

Fig. 2. Schematic of the magnetic charge model for a cuboidal magnet.

式 (5) 表明磁力刚度主要与磁体的几何尺寸、磁间隙、表面极化强度和方向有关, 对于本文的理论模型, 极化方向决定磁力刚度的正负, 同向极化 (磁体 A 受磁体 B、C 为吸力) 为负刚度, 反向极化 (磁体 A 受磁体 B、C 为斥力) 为正刚度。由于各参数对磁力刚度的影响具有类似性, 其他参数不变情况下, 本文仅讨论磁间隙和剩余磁通密度对磁力刚度的影响。图 3 (a) 和 (b) 分别给出同向极化下, 变表面剩余磁通密度和变磁间隙对磁力刚度的影响, 其中实线为等面密度矩形磁铁由式 (5) 计算的理论值, 虚线为圆柱形磁铁的有限元数值模拟值, 两者吻合较好, 表明计算磁力刚度时可将其等效为等面密度的矩形磁铁, 同时表明增大表面剩余磁通密度和减小磁间隙均能增大负刚度值。此外, 本文假设声波为小扰动简谐波, 在其激励下磁体 A 位移很小, 因此在动态变形过程中磁力刚度变化极小, 故可取平衡位置处磁力刚度进行计算, 并忽略其非线性^[33]。

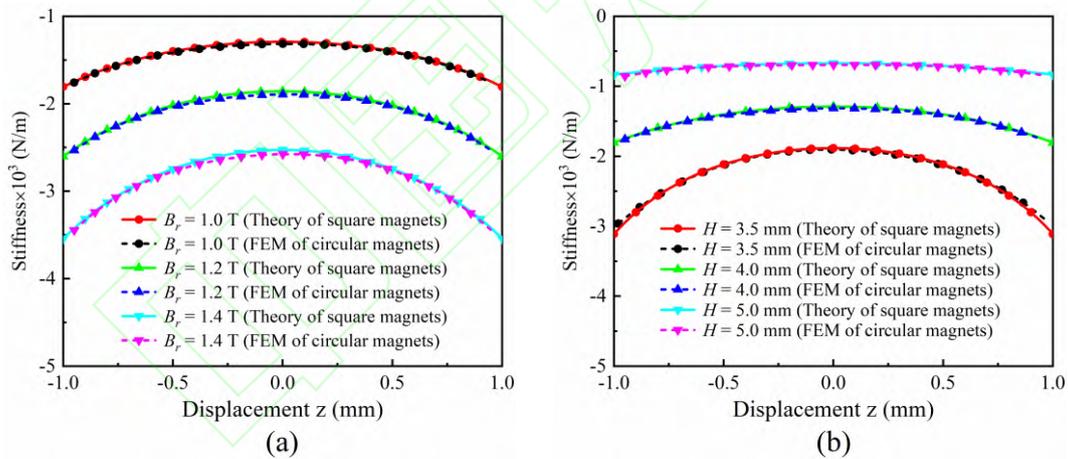


图 3 (a) 磁间隙保持不变 ($H = 4.0 \text{ mm}$), 磁力负刚度随剩余磁通密度的变化; (b) 剩余磁通密度保持不变 ($B_r = 1.0 \text{ T}$), 磁力负刚度随磁间隙的变化

Fig. 3. (a) Variation of negative magnetic stiffness with residual flux density at $H = 4.0 \text{ mm}$, and (b) variation of negative magnetic stiffness with magnetic gap at $B_r = 1.0 \text{ T}$.

2.3 隔声理论

如图 1 (d) 所示, QZSMAMM 单元结构可简化为带有受动态磁负刚度弹簧作用的附加质量的张紧薄膜。基于经典薄膜振动理论^[34], QZSMAMM 单元结构在声波激励下

的运动方程为:

$$\begin{aligned} \rho_{mem} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_{mag} \hbar(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \nabla^2 w \\ + \frac{K_{mag}}{l_x l_y} \hbar(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) w = P^- \Big|_{z=0^-} - P^+ \Big|_{z=0^+} \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $w(x, y, t)$ 是薄膜在位置 (x, y) 处随时间的 z 方向挠度, (x_0, y_0) 是等面密度矩形磁

铁左下角位置的坐标, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为笛卡尔坐标系下的拉普拉斯算子, K_{mag} 为磁负

刚度。

P^- 和 P^+ 分别是薄膜上下侧的声压, 假设平面入射声波的入射角为 θ , 方位角为 φ , 考虑到本文固定边界条件对膜结构振动的影响, 将反射声压和透射声压表示为模态级数形式, 其表示为:

$$\begin{aligned} P^- &= p_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{mn} \phi_{mn} e^{i(\omega t + k_z z)} \\ P^+ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{mn} \phi_{mn} e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned} \quad (7)$$

其中, p_0 为入射声压幅值、 ϕ_{mn} 为薄膜的振型函数, β_{mn} 和 ε_{mn} 为反射声波和透射声波的声压幅值系数, ω 为声波角频率, k_x , k_y , k_z 为 x , y , z 方向的波数分量, 分别为:

$$k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi, \quad k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad k_z = k_0 \cos \theta \quad (8)$$

其中, $k_0 = \omega / c_0$ 为空气中的声波波数, c_0 为声波在空气中传播速度。

为使声压表示一致性和方程求解的可行性, 将入射声压进行如下傅里叶变换

$$p_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} \phi_{mn} e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (9)$$

其中

$$\lambda_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} p_0 e^{i(-k_x x - k_y y)} \phi_{mn} dx dy \quad (10)$$

由声学边界条件知，两种介质在分界面上的法向质点速度连续，即膜结构法向振动速度等于膜表面流体介质质点速度，结合流体动力学方程可得如下^[35]：

$$\begin{aligned}\frac{\partial P^-}{\partial z} &= -i\omega\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} & z=0^- \\ \frac{\partial P^+}{\partial z} &= -i\omega\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} & z=0^+\end{aligned}\quad (11)$$

其中， ρ_0 为空气的密度。

将（7）、（8）、（9）、（10）带入（11）可得薄膜（ $z=0$ ）上下侧处的声压差

$$P^-|_{z=0^-} - P^+|_{z=0^+} = 2\lambda_{mn}\phi_{mn}e^{i\omega t} - \frac{2\rho_0\omega}{k_z} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (12)$$

式（6）左侧的函数 \hbar 为四个 Heaviside 函数的组合，即：

$$\begin{aligned}\hbar(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) &= \\ &[H(x-x_0) - H(x-x_0-l_x)] \cdot [H(y-y_0) - H(y-y_0-l_y)]\end{aligned}\quad (13)$$

该函数在附着质量的表面上取 1，在薄膜的其他位置取 0，带入式（12）至（6）中，可得：

$$\begin{aligned}\rho_{mem} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_{mag} \hbar(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T\nabla^2 w \\ + \frac{K_{mag}}{l_x l_y} \hbar(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) w + \frac{2\rho_0\omega}{k_z} \frac{\partial w}{\partial t} = 2\lambda_{mn}\phi_{mn}e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (14)$$

入射声压为平面简谐波时，薄膜亦简谐振动，其横向挠度由下式给出：

$$w(x, y, t) = \phi(x, y)e^{i\omega t} \quad (15)$$

其中 ϕ 是薄膜的振型函数。

为了得到方程（14）的解，本文采用伽辽金加权残余法^[36]，伽辽金加权残余法是一种求解微分方程的有效方法。其基本思路是选取有限多项能够满足边界条件的势函数（又称基函数或形函数），将它们线性叠加作为微分方程的近似解，再将该近似解代入微分方程求出残差并在求解域内及边界上对权函数（即势函数本身）加权积分，令加权积分为零求出待定系数。附着质量块的薄膜的横向挠度可表示为无穷多阶振型

函数的叠加:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}_{mn} \phi_{mn}(x, y) e^{i\omega t} \quad (16)$$

其中 \tilde{q}_{mn} 是模态系数。

设薄膜边界固定, 其振型函数 $\phi_{mn}(x, y)$ 可取为:

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (17)$$

将 (16)、(17) 带入 (14), 采用伽辽金加权残余法, 乘以正交模态函数 $\phi_{rs}(x, y)$ 作为加权函数, 在薄膜表面积分, 可得:

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[\begin{aligned} & \rho_{mem} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_{mag} \dot{h}(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \nabla^2 w \\ & + \frac{K_{mag}}{l_x l_y} \dot{h}(x, y, x_0, y_0, l_x, l_y) w + \frac{2\rho_0 \omega}{k_z} \frac{\partial w}{\partial t} - 2\lambda_{mn} \phi_{mn} e^{i\omega t} \end{aligned} \right] \phi_{rs}(x, y) dx dy = 0 \quad (18)$$

式 (18) 是无限代数方程, 在满足精度的条件下, 可对指标作截断 ($1 < r < M$, $1 < s < N$), 将其写成矩阵的形式:

$$\begin{aligned} M_{MN,MN} &= \rho_{mem} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{rs} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{mn} dx dy \\ I_{MN,MN} &= \rho_{mag} \int_{x_0}^{x_0+l_x} \int_{y_0}^{y_0+l_y} \phi_{rs} \phi_{mn} dx dy \\ D_{MN,MN} &= \frac{2\rho_0 c_0}{\cos \theta} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{rs} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{mn} dx dy \\ K_{MN,MN} &= -T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{rs} \nabla^2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{mn} dx dy \\ F_{MN,MN} &= \frac{K_{mag}}{l_x l_y} \int_{x_0}^{x_0+l_x} \int_{y_0}^{y_0+l_y} \phi_{rs} \phi_{mn} dx dy \\ R_{MN,1} &= \frac{L_x L_y}{4} \lambda_{MN,1} \\ H_{MN,1} &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{rs} dx dy \end{aligned} \quad (19)$$

将 (19) 带入 (18), 可得:

$$-\omega^2 ([\mathbf{M}] + [\mathbf{I}]) \tilde{\mathbf{q}} + i\omega [\mathbf{D}] \tilde{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}] \tilde{\mathbf{q}} + [\mathbf{F}] \tilde{\mathbf{q}} = 2[\mathbf{R}] \quad (20)$$

其中, 矩阵 $[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{D}]$ 和 $[\mathbf{K}]$ 是 $MN \times MN$ 的对角矩阵, $[\mathbf{R}]$ 、 $[\mathbf{H}]$ 、 $[\lambda]$ 、 $[\phi]$ 和 $[\tilde{\mathbf{q}}]$ 是

$MN \times 1$ 的矩阵， $[\mathbf{I}]$ 和 $[\mathbf{F}]$ 是 $MN \times MN$ 的矩阵。

由式（20）可得薄膜的模态系数为：

$$[\tilde{\mathbf{q}}] = \frac{2[\mathbf{R}]}{-\omega^2([\mathbf{M}] + [\mathbf{I}]) + i\omega[\mathbf{D}] + [\mathbf{K}] + [\mathbf{F}]} \quad (21)$$

薄膜任意位置 (x, y) 的挠度为：

$$\tilde{w}(x, y) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \tilde{q}_{mn} \phi_{mn}(x, y) = [\boldsymbol{\phi}]^T [\tilde{\mathbf{q}}] \quad (22)$$

定义任意入射角下薄膜的声功率透射系数 τ 为透射强度与入射强度之比：

$$\tau(\theta) = \left| \frac{\rho_0 c_0 \langle \tilde{v} \rangle}{\tilde{A}} \right|^2 = \left| \frac{i\omega \rho_0 c_0}{L_x L_y} [\mathbf{H}]^T [\tilde{\mathbf{q}}] \right|^2 \quad (23)$$

式中， $\langle \tilde{v} \rangle$ 为整个薄膜的平均速度振幅，表明透射系数 τ 不仅与结构参数有关，还与入射角 θ 和方位角 φ 有关。在混响室等漫射声场中测量的透射系数可以定义为入射角 θ 和方位角 φ 上斜向透射系数的平均值^[17]。考虑到单元胞的轴对称性，方位角 φ 对透射系数计算没有贡献。因此，在漫射声场激励下，薄膜的声功率透射系数可表示为：

$$\tau_{diff} = \frac{\int_0^{\theta_{lim}} \tau(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta}{\int_0^{\theta_{lim}} \sin \theta \cos \theta d\theta} \quad (24)$$

其中， θ_{lim} 为入射角的上限。由此，薄膜的传输损失 TL（Transmission loss）为：

$$TL = 10 \log_{10}(1/\tau) \quad (25)$$

2.4 收敛性验证及有限元模型

采用级数截断方法对理论模型进行求解时，求和项的数量应足够大才能确保所有解满足收敛性和精度的要求，故有必要开展收敛性验证。Lee 等^[37]发现，如展开项数可保证在某个频率收敛，则低于该频率时均收敛。因此，具体计算时，可选取感兴趣的最高频率（即 1000 Hz）开展收敛性验证即可。针对 QZSMAMM 结构（ $B_r = 1.0 \text{ T}$ ， $H = 4.0 \text{ mm}$ ），给定垂直入射声激励的频率为 1000 Hz，图 4

给出截断数对计算所得 TL 收敛性的影响。结果表明，取 $M = N = 40$ 时可基本满足收敛的要求。

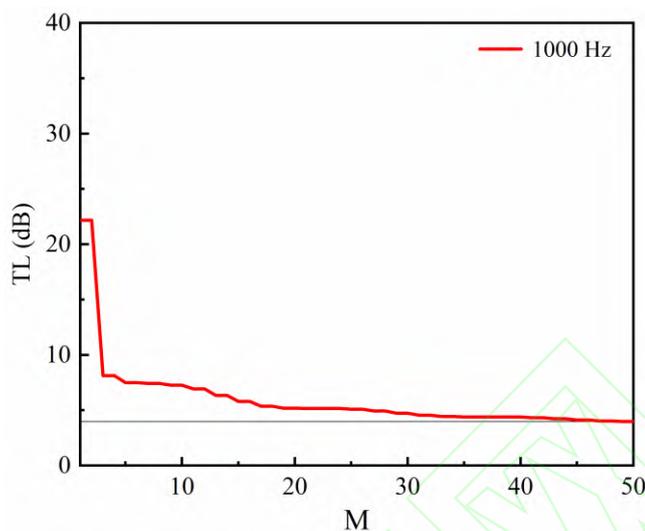


图 4 1000 Hz 垂直入射声激励下，QZSMAMM 的 TL 收敛性验证

Fig. 4. Convergence check of theoretically predicted transmission loss (TL) of QZSMAMM under the excitation of a normally incident sound wave at 1000 Hz.

为验证理论模型的有效性，建立相应的有限元模型；如图 5 所示，模型由 QZSMAMM 单元结构、入射场、透射场和完美匹配层组成。空气域的四周为硬声场边界，模拟声阻抗管测试环境；单元框架设置为刚形体，四周为固定约束；完美匹配层模拟声全吸收以消除反射声波的干扰。在入射场施加 1 Pa 的法向背景声场；在完美匹配层与入射场、透射场的边界 (S_1 和 S_2)，采用积分法计算结构的传输损失，即：

$$W_{in} = \int_{S_1} \frac{p_{in}^2}{2\rho_0 c_0} dS, \quad W_{tr} = \int_{S_2} \frac{p_{tr}^2}{2\rho_0 c_0} dS \quad (26)$$

$$TL = 10 \log_{10}(W_{in} / W_{tr})$$

其中， p_{in} 为 S_1 面入射声压， p_{tr} 为 S_2 面透射声压， W_{in} 和 W_{tr} 分别为入射声功率和透射声功率，TL 的单位为分贝。

QZSMAMM 单元采用膜单元和固体单元建模，空气域由基于波动方程的压力声学建模，空气域和固体域边界为声固耦合，磁相互作用采用动平衡位置的线

性化刚度乘以磁铁平均法向位移实现。采用自由四面体单元对固体域和空气域进行网格划分，膜单元则采用平面三角形网格：为确保结果的准确性，最大单元尺寸为最小声波波长的 1/8。空气的密度和声速分别选用 1.29 kg/m^3 和 340 m/s 。

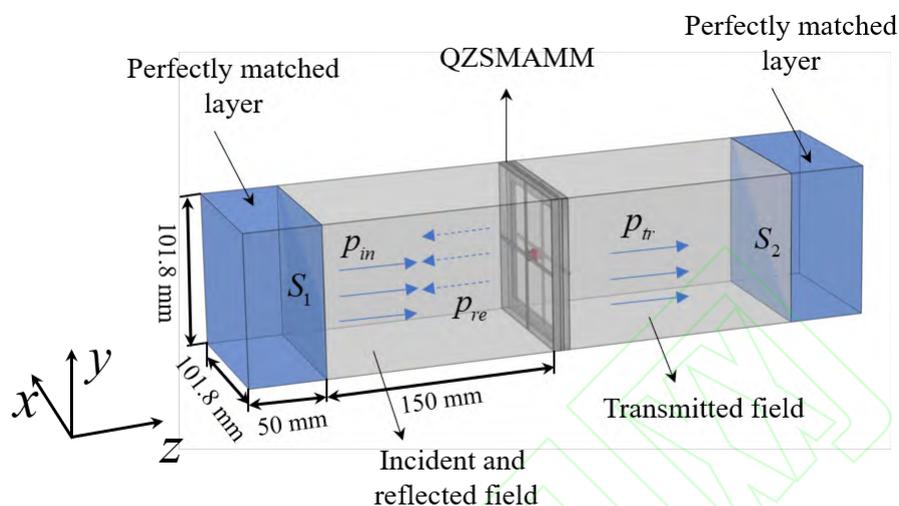


图 5 QZSMAMM 的有限元模型

Fig. 5. Finite element simulation model of QZSMAMM.

3 分析与讨论

3.1 模型验证与隔声机理探究

为验证理论模型的正确性，针对 1~1000 Hz 频率范围的传输损失曲线，图 6 (a) 比较了有/无动态磁负刚度三组对照结构的理论预测（实线）和有限元数值模拟（虚线），其中红色和黑色线表示无动态磁负刚度（简称：Non-NS）的结果；绿色和蓝色线为 $B_r = 1.0 \text{ T}$ ， $H = 4.0 \text{ mm}$ 的结果；青色和粉红色线为 $B_r = 1.0 \text{ T}$ ， $H = 3.5 \text{ mm}$ 的结果。表 1 列出计算式采用的 QZSMAMM 结构参数。分别取磁铁 B 和 C 的取磁间隙为 $H = 4 \text{ mm}$ 和 $H = 3.5 \text{ mm}$ ，据式 (5)，磁铁 A 在动平衡位置的动态刚度分别为 $K_{mag} = -1289 \text{ N/m}$ 和 $K_{mag} = -1883 \text{ N/m}$ ，基于 2.3 节建立的隔声理论模型即可进行理论预测。

总体来看，理论预测和数值模拟吻合较好，从而验证了本文所建模型的准确性。同时，从传输损失曲线可以看出，相比于传统的薄膜声学超材料（membrane

acoustic metamaterial, 简称: MAMM) 结构 (Non-NS), QZSMAMM 结构能够使 TL 峰值频率向低频移动, 且随着磁间隙的减小, 峰值频率越小。此外, 表 2 列出三组对照结构的理论预测和有限元数值模拟的峰/谷值频率。理论预测的峰值频率依次为 432 Hz、336 Hz 和 281 Hz, 谷值频率依次为 297 Hz、143 Hz 和 86 Hz, 峰/谷频率差依次为 135 Hz、193 Hz 和 195 Hz。有限元模拟的峰值频率依次为 435 Hz、325 Hz 和 270 Hz, 谷值频率依次为 295 Hz、130 Hz 和 95 Hz, 峰/谷频率差依次为 140 Hz、195 Hz 和 175 Hz。上述结果表明, 相较于峰值频率, QZSMAMM 的第一隔声谷频率向低频移动的更快, 尤其是当 $H = 3.5$ mm 时, 原本的隔声谷值高达 20 dB, 进一步体现了 QZSMAMM 的低频超宽带隔声效果。

表 1 QZSMAMM 单元几何参数和材料参数 (单位: mm、T、N/m、kg/m²)

Table 1. Geometric and material parameters of QZSMAMM unit (unit: mm, T, N/m, kg/m²).

L_x	L_y	l_x	l_y	t	t_1	B_r	T	ρ_{mem}	ρ_{mag}
40	40	5.32	5.32	0.2	2.0	1.0	500	0.24	15.6

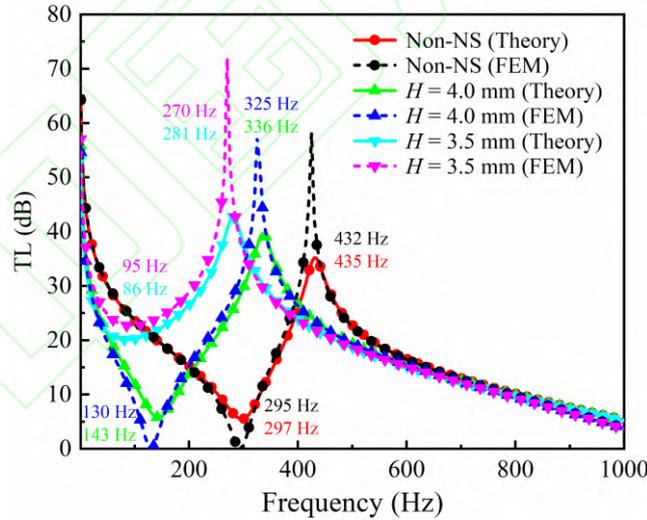


图 6 三组对照结构的理论和数值模拟传输损失对比

Fig. 6. Comparison between theoretical model predictions and numerical simulation results of transmission loss for three different structures.

表 2 理论和数值模拟的峰/谷频率

Table 2. Theoretical and numerical results for peak/valley frequencies.

Peak/valley Frequency (Hz)	Non-NS	$B_r = 1.0$ T, $H = 4.0$ mm	$B_r = 1.0$ T, $H = 3.5$ mm
Theory	435/297	336/143	281/86
FEM	432/295	325/130	270/95

模态是结构本身自由振动的固有属性。对于受声场作用的强迫振动，其响应（隔声量）与结构的模态密不可分，故对解释隔声峰/谷至关重要。鉴于本文所研究的隔声频段为 1~1000 Hz，模态频率不在该频段的振动模式对结果影响较小，故有限元模拟只给出前四阶模态，如图 7 所示：其中，（a）为 Non-NS 的前四阶模态；（b）为 $B_r = 1.0$ T， $H = 4.0$ mm 的前四阶模态；（c）为 $B_r = 1.0$ T， $H = 3.5$ mm 的前四阶模态。结果表明，三组对照结构的前四阶模态具有相似性，一阶模态表现为薄膜-质量整体同相共振，其频率接近图 6 有限元数值模拟（虚线）传输损失的第一隔声谷频率（ $H = 3.5$ mm 除外）。声波频率接近一阶模态频率时会激发结构的一阶本征模，此时整个结构的振动速度大，导致在透射场产生强烈的声辐射，进而产生第一隔声谷。需要注意的是， $B_r = 1.0$ T 和 $H = 3.5$ mm 对应的一阶模态共振频率为纯虚数（即 $125.47i$ Hz），表明此时一阶共振模态已消失。伴随着一阶模态的消失，第一隔声谷大幅提升，故该隔声谷并非一阶模态所致，其原因将在后文解释。二阶和三阶模态为反对称模态，此时质量块几乎无位移，磁负刚度对其无影响，三组对照结构的二阶和三阶频率相同，且在薄膜反对称振动时，其声场也呈现反对称，故二阶和三阶模态不影响超材料的隔声性能。四阶模态为薄膜-质量反相共振，整体叠加后的平均振动速度大，故当声波频率接近四阶模态频率时，薄膜透射侧也可产生强烈的声辐射，进而在隔声曲线上出现第二隔声谷。值得注意的是，在四阶共振模态频率下，由于质量块本身的位移较小，磁负刚度对其产生的磁相互作用可忽略不计，故三组对照结构的四阶模态频率几乎相等，由此解释了所有曲线在 600~1000 Hz 频率段基本重合的原因。

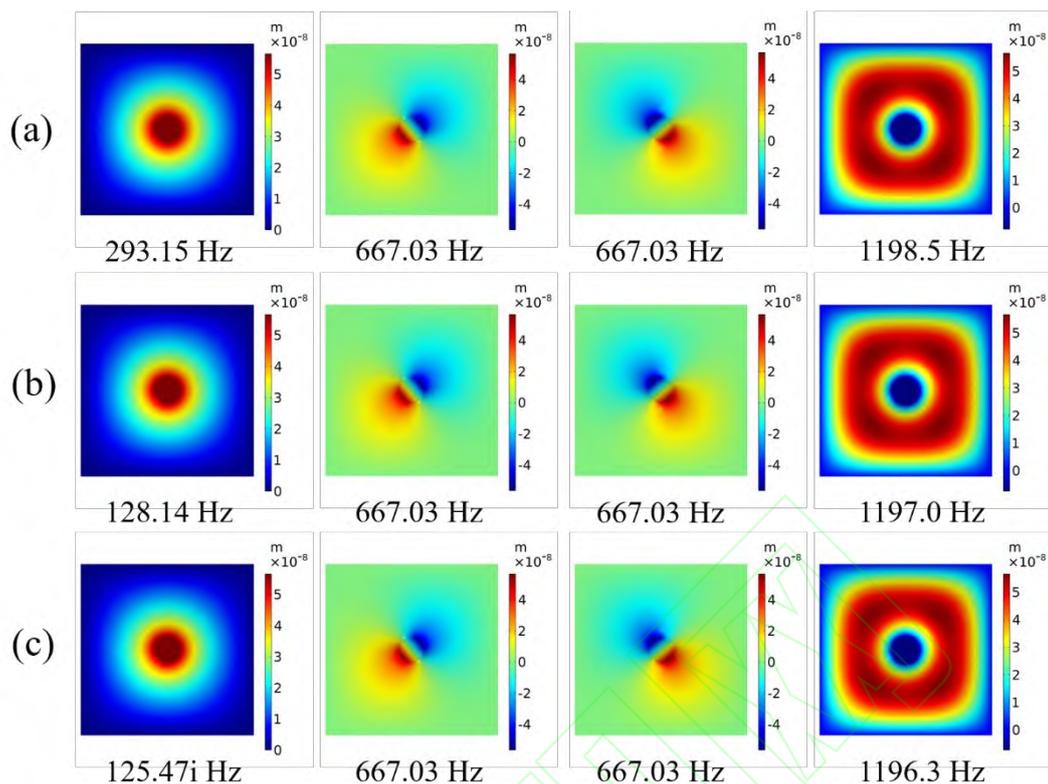


图 7 共振模态：(a) 无动态磁负刚度；(b) $B_r = 1.0 \text{ T}$, $H = 4.0 \text{ mm}$ ；(c) $B_r = 1.0 \text{ T}$, $H = 3.5 \text{ mm}$
 Fig. 7. Resonance mode: (a) Non-NS; (b) $B_r = 1.0 \text{ T}$, $H = 4.0 \text{ mm}$; (c) $B_r = 1.0 \text{ T}$, $H = 3.5 \text{ mm}$.

为进一步分析结构在第一隔声峰/谷频率下的传声特性，采用有限元模型，模拟了三组对照结构在第一隔声峰/谷处的振动模式（图 8），以及薄膜的横向平均速度和相位变化（图 9）。图 8 显示，在隔声谷处（ $H = 3.5 \text{ mm}$ 除外），受一阶模态共振影响，薄膜-质量表现为共振模式，此时质量块和薄膜做同相振动，薄膜的横向平均速度达到极大值（如图 9（a）所示），进而向周围空气域辐射大量声能量。 $H = 3.5 \text{ mm}$ 的隔声谷处，薄膜-质量也表现为共振模式，但其平均振动速度达到的极大值相比前者较小，故其隔声量得到大幅提升。相反，在隔声峰处，受四阶共振模态影响，薄膜-质量表现为反共振模式，质量块与薄膜做反相振动使薄膜的横向平均速度为零（如图 9（a）所示），进而使透射声场声波叠加相消，抑制了声能量的传输。此外，图 9（b）所示的相位变化显示，隔声峰相位发生突变（达 $\pm 90^\circ$ ），隔声谷相位为零（ $H = 3.5 \text{ mm}$ 除外）， $H = 3.5 \text{ mm}$ 的隔声谷相位达到极

小，但仍接近 -90° 。相位表示透射声压的传播方向，零相位表明声能量几乎全透射， $\pm 90^\circ$ 相位则表示声能量几乎全反射：该现象在图 11 所示的声压云图中得到证实。

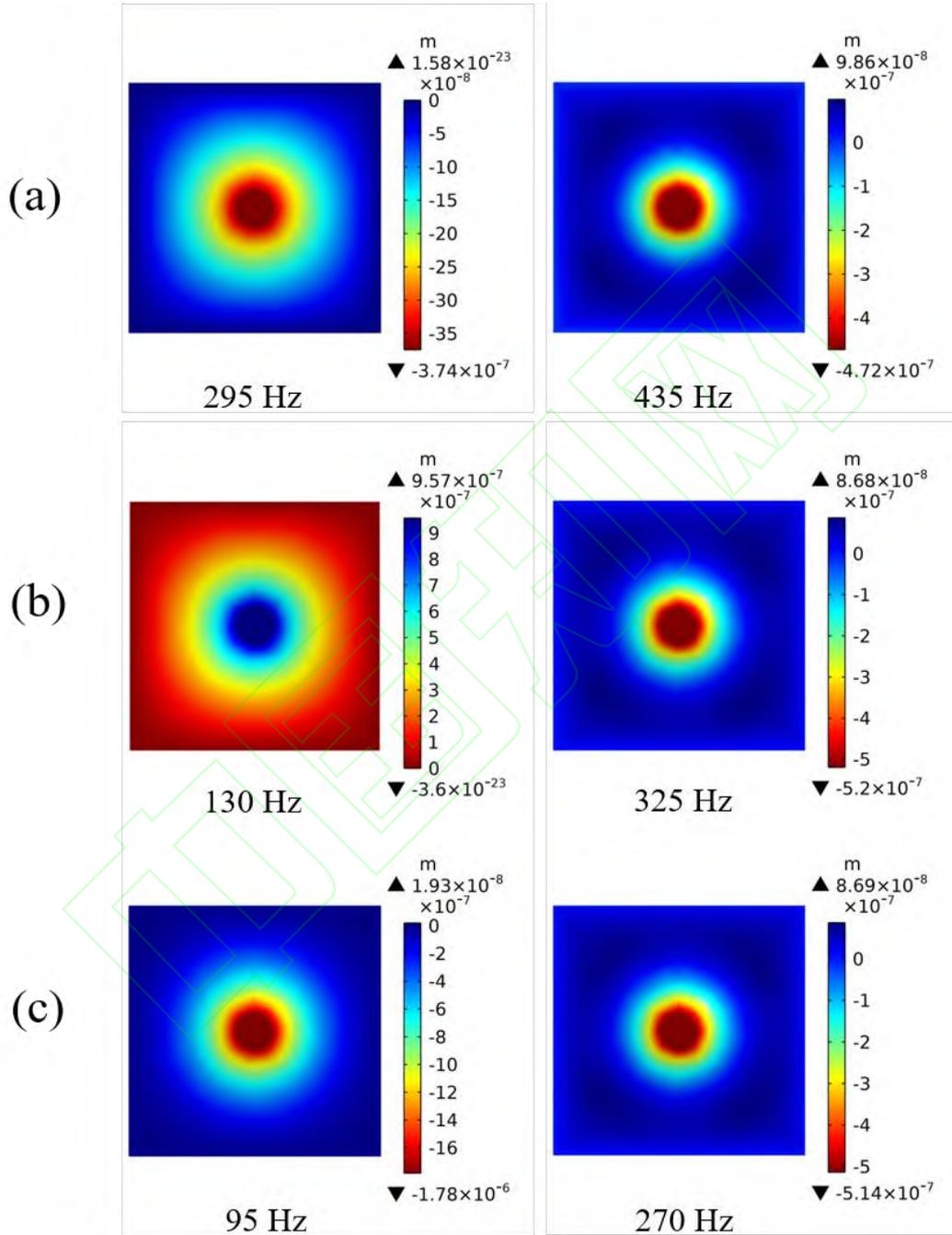


图 8 隔声峰/谷的振动模式：(a) 无动态磁负刚度；(b) $B_r = 1.0$ T, $H = 4.0$ mm；(c) $B_r = 1.0$ T, $H = 3.5$ mm

Fig. 8. Vibration mode diagrams at sound insulation peak/ valley: (a) Non-NS; (b) $B_r = 1.0$ T, $H = 4.0$ mm; (c) $B_r = 1.0$ T, $H = 3.5$ mm.

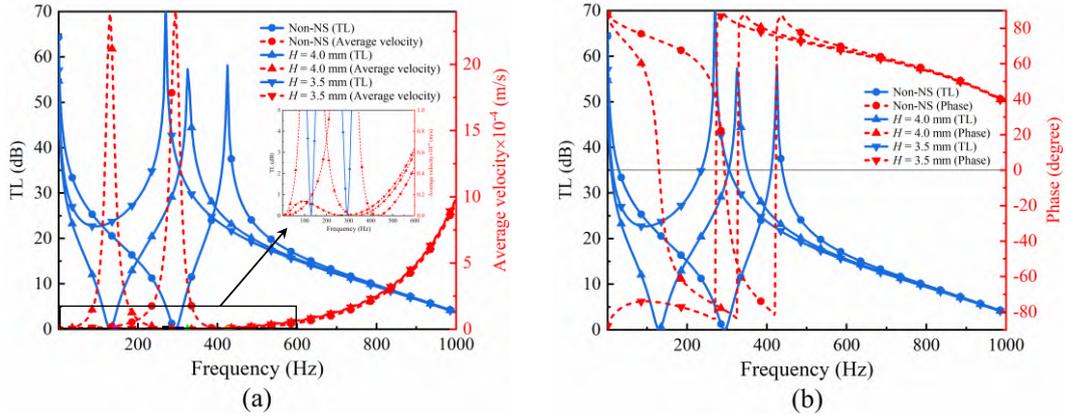


图 9 (a) 三组对照结构的传输损失和平均速度；(b) 三组对照结构的传输损失和相位变化

Fig. 9. Curves of (a) transmission loss and average velocity and (b) transmission loss and phase change for three different structures.

图 10 给出上述三组对照结构的等效质量面密度。结果表明，在隔声峰处，等效质量面密度趋于无穷，实现了声波的全反射，而该结果可从图 11 所示的声压云图得到验证；相反，在隔声谷处（ $H = 3.5$ mm 除外），等效质量面密度近似为零，实现了声波几乎全透射，从图 11 所示的声压云图也可得到验证。对应于 $H = 3.5$ mm 的传输损失和等效质量面密度则显示，在 95 Hz 的隔声谷处，等效质量面密度达到极小但仍较大，故此时声波实现了部分反射，这同样在图 11 所示的声压云图中得到证实。综上，该隔声谷并非一阶模态共振所致，而是结构边界约束和质量效应共同作用的结果。

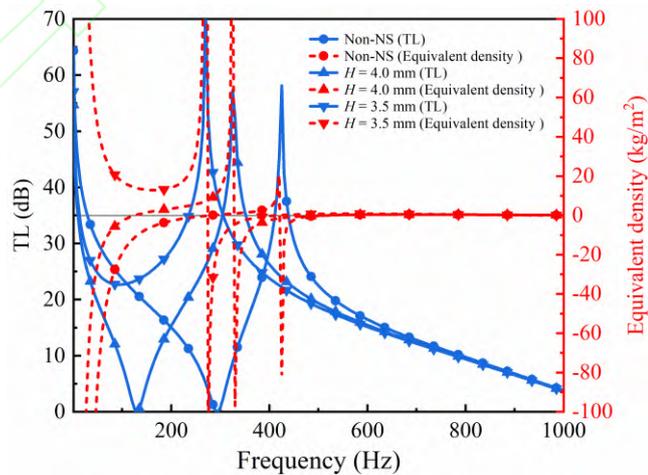


图 10 三组对照结构的传输损失和等效质量面密度曲线

Fig. 10. Transmission loss and equivalent mass surface density curves of three different structures.

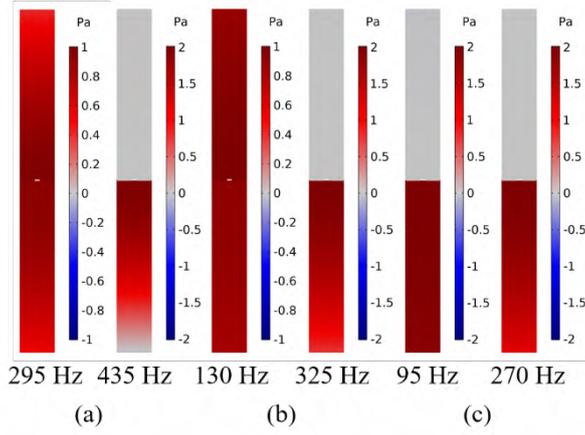


图 11 隔声峰/谷的声压云图 (单位: Pa) (a) 无动态磁负刚度; (b) $B_r = 1.0$ T, $H = 4.0$ mm; (c) $B_r = 1.0$ T, $H = 3.5$ mm

Fig. 11. Sound pressure cloud diagram at sound insulation peak/ valley (unit: Pa): (a) Non-NS; (b) $B_r = 1.0$ T, $H = 4.0$ mm; (c) $B_r = 1.0$ T, $H = 3.5$ mm.

3.2 等效二自由度系统

尽管薄膜-质量结构具有无穷多自由度, 相应会产生无穷多的振动模态, 但如前文所述, 本文考虑结构的低频隔声性能仅受一阶共振和四阶反共振模态的影响, 故可用二自由度振动系统近似描述其动力学特性, 相应的解析解可清楚地反映各参数的影响规律。图 12 给出等效的二自由度弹簧-质量模型。由于阻尼对低频隔声影响较小, 故忽略薄膜的阻尼, 其中 m_1 、 m_2 分别表示质量块和薄膜的质量, 刚度 k_{mem} 表示张紧薄膜在质量块位置的等效刚度, 刚度 K_{mag} 表示动态磁负刚度。该二自由度弹簧-质量等效模型的自由振动方程可表示为:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mag} + k_{mem} & -k_{mem} \\ -k_{mem} & k_{mem} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

其中, x_1 , x_2 分别表示 m_1 , m_2 的位移, f_1 , f_2 为上述二自由度系统的固有频率, 可由式 (27) 求得如下:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2}(X - Y)}, \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2}(X + Y)} \quad (28)$$

其中, $X = \frac{K_{mag} + k_{mem}}{m_1} + \frac{k_{mem}}{m_2}$, $Y = \sqrt{\left(\frac{K_{mag} + k_{mem}}{m_1} - \frac{k_{mem}}{m_2}\right)^2 + \frac{4k_{mem}^2}{m_1 m_2}}$, f_1 和 f_2 分别表示系统的两阶固有频率。通过类比模态可知, f_1 和 f_2 分别对应结构的一阶和四阶模态频率, 同时也

对应图 6 所示的第一（ $H = 3.5 \text{ mm}$ 除外）和第二隔声谷频率。因 m_1 远大于 m_2 ，故 $\frac{K_{mag} + k_{mem}}{m_1} - \frac{k_{mem}}{m_2} < 0$ ， $\frac{\partial X}{\partial K_{mag}} + \frac{\partial Y}{\partial K_{mag}} > 0$ 。随着磁负刚度 K_{mag} 的增大， X 减小， Y 增大， $X+Y$ 减小，故 f_1 相比 f_2 下降更显著，即第一隔声谷频率相比第二隔声谷频率向低频移动的更快，体现了 QZSMAMM 的低频宽带效果。此外，就式 (28) 而言，随着磁负刚度的增大， f_1 显著下降，故必然存在两个临界磁负刚度对应的临界磁间隙 H_0 （第一临界磁间隙，对应于结构的一阶模态频率为零时的磁间隙）和 H_1 （第二临界磁间隙，对应于结构的相位突变频率为零时的磁间隙），分别使得第一隔声谷/峰频率为零。磁间隙满足 $H_1 < H < H_0$ 时，一阶模态频率 f_1 为纯虚数，隔声峰频率大于零：此时，一阶模态消失，隔声谷值得到大幅提升，对应图 6 中 $B_r = 1.0 \text{ T}$ ， $H = 3.5 \text{ mm}$ 的结果。

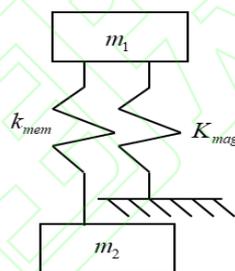


图 12 QZSMAMM 的弹簧-质量等效模型

Fig. 12. Spring-Mass Equivalent Model of QZSMAMM.

3.3 磁间隙的影响

如前所述，其余参数不变，增大剩余磁通密度或减小磁间隙均能增大动态磁负刚度，而动态磁负刚度对结构的低频调制具有重要影响。因此，保持剩余磁通密度 $B_r = 1.0 \text{ T}$ 不变，本节给出七组不同磁间隙下的传输损失曲线，如图 13 所示。磁间隙 $H = 3.7 \text{ mm}$ 时，第一隔声谷频率几乎为零，该磁间隙即为上文所提的第一临界磁间隙 H_0 。磁间隙 $H = 2.92 \text{ mm}$ 时，第一隔声峰频率几乎为零，该磁间隙即为上文所提的第二临界磁间隙 H_1 。当 $H_0 < H$ 且减小时，隔声峰频率向低频移动，第一隔声

谷频率较第二隔声谷频率向低频移动更快，从而隔声带宽变大且隔声峰值很高。

$H_1 < H < H_0$ 且减小时，结构的一阶模态消失，第一隔声谷值得到大幅提升且隔声量更大，呈现出低频超宽带的隔声特性。因剩余磁通密度的影响具有相似性，不再赘述。

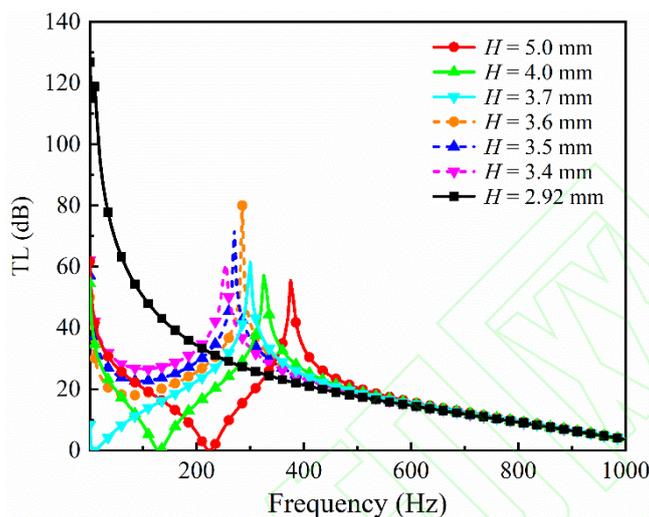


图 13 剩余磁通密度保持不变 ($B_r = 1.0$ T)，传输损失随磁间隙的变化

Fig. 13. Variation of transmission loss with magnetic gap fixed at $B_r = 1.0$ T.

3.4 声波入射角和方位角的影响

如前所述，透射系数不仅与 QZSMAMM 的结构参数有关，还与声波的入射角 θ 和方位角 φ 有关。为进一步获得斜入射声波对 QZSMAMM 结构的隔声特性影响规律，通过理论计算得到了图 14 (a) 方位角 $\varphi = 0^\circ$ 时，传输损失随入射角 θ 的变化和图 14 (b) 入射角 $\theta = 30^\circ$ 时，传输损失随方位角 φ 的变化。图 14 (a) 显示声波入射角不改变隔声峰/谷值频率，故不影响本文所述 QZSMAMM 结构的独特优势，但随着入射角 θ 的增大，隔声谷值增大，峰值减小，其原因在于第一隔声谷为一阶模态共振所致，是结构的固有属性，隔声峰为反共振引起透射声场叠加相消所致，也是结构的固有特性，声波入射角只是削弱了结构在法向方向的入射声能量，导致结构的振动幅值减小，从而表现出第一隔声谷值增大，峰值减小。此外，图 14 (b) 显示由于结构具有对称性，方位角 φ 对隔声无影响。

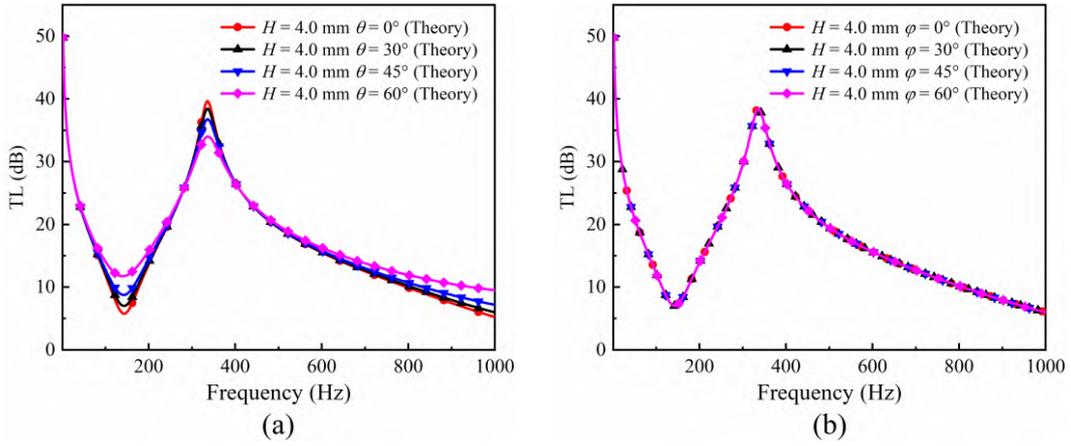


图 14 (a) 方位角 $\varphi=0^\circ$ ，传输损失随入射角 θ 的变化；(b) 入射角 $\theta=30^\circ$ ，传输损失随入射角 φ 的变化

Fig. 14. (a) Variation of transmission loss with incidence angle at $\varphi=0^\circ$; (b) Variation of transmission loss with azimuth at $\theta=30^\circ$.

3.5 QZSMAMM 的优势再讨论

前文讨论的三组对照结构中，有/无动态磁负刚度对应不同的隔声峰值频率（对应反共振模式），即引入动态磁负刚度改变了结构的整体动力特性。通过设计磁负刚度和张力，让 QZSMAMM 和传统的 MAMM 保持相同的隔声峰值频率，此时两种结构在峰值频率处对应的隔声量和有效隔声带宽是否产生差别，是一个有趣的问题。为此，设计了三种工况，对应不同的峰值频率：386 Hz、274 Hz 和 138 Hz，结果如图 15 所示。其中，I 型代表传统薄膜声学超材料（无磁负刚度），II 型代表 QZSMAMM，具体结构参数见表 3。

图 14 结果表明，对于传统的薄膜声学超材料，通过减小薄膜张力可将其隔声峰值频率调节到低频，但隔声的峰值随之降低，且有效带宽变小。通过调整薄膜张力和磁负刚度，QZSMAMM 结构也可将隔声峰值频率调低，但其隔声峰值和有效带宽并未降低；换言之，QZSMAMM 仍然拥有较好的隔声量和有效带宽。原因在于，QZSMAMM 的主要设计参数包含预张力和磁负刚度，结构隔声特性是两者共同影响的结果：一方面，通过尽量保持大的预张力，可实现较大的隔声

带宽和隔声峰值；另一方面，通过设计动态磁负刚度，可在降低峰值频率的同时，使第一谷值频率较第二谷值频率向低频移动更快。此外，图 14 (b) 给出上述三种工况对应的等效质量面密度曲线。结果表明，相较于传统的薄膜声学超材料，QZSMAMM 在峰值频率处的等效质量面密度明显更高，与隔声峰值的规律相吻合。综上，相较于传统的 MAMM 结构，本文提出的 QZSMAMM 具有更低频更宽带的隔声特性。

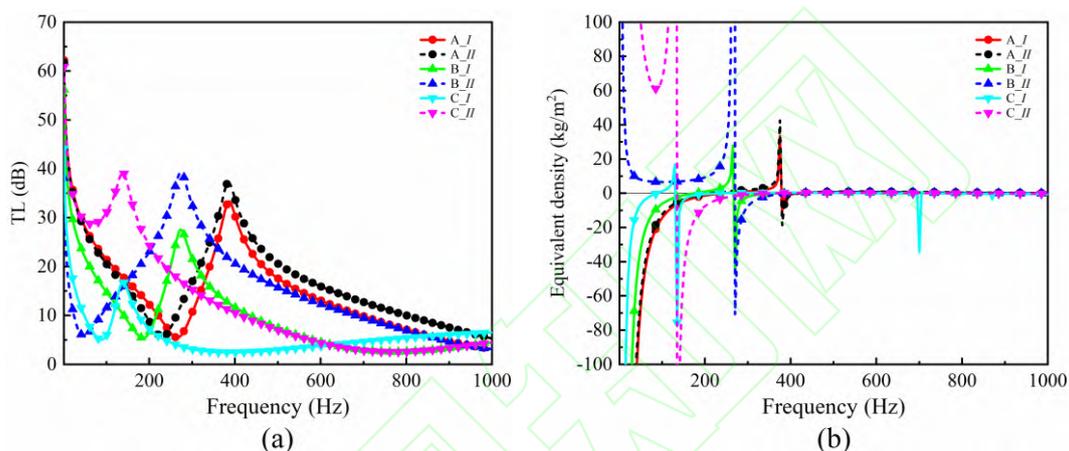


图 15 (a) 三种工况的传输损失对比 (*I*: MAMM, *II*: QZSMAMM); (b) 三种工况的等效质量面密度对比 (*I*: MAMM, *II*: QZSMAMM)

Fig. 15. (a) Comparison of transmission loss curves among three working conditions (*I*: MAMM, *II*: QZSMAMM); (b) comparison of equivalent mass surface density curves among three working conditions (*I*: MAMM, *II*: QZSMAMM).

表 3 三种不同工况的结构参数和目标频率

Table 3. Structural parameters and target frequencies for three different operating conditions.

Configuration		T (N/m)	K_{mag} (N/m)	f (Hz)
A	<i>I</i>	400	0	386
	<i>II</i>	500	-670	386
B	<i>I</i>	200	0	274
	<i>II</i>	400	-1300	274
C	<i>I</i>	50	0	138
	<i>II</i>	200	-970	138

4 实验验证

4.1 结构制备

实验选取的薄膜材料为聚酰亚胺，厚度 $t = 0.025$ mm，宽 $L_x = L_y = 40$ mm；所用框架采用环氧树脂材料 3D 打印而成，直径为 98.6 mm，如图 16 (b) 所示；

磁铁采用常规型的稀土磁体，半径 $r_A = r_B = r_C = 3 \text{ mm}$ ，厚度 $t_1 = 1.68 \text{ mm}$ ，剩余磁通密度 $B_r = 0.378 \text{ T}$ ，相对磁导率为 1.023。相关材料参数见表 4。鉴于实验阻抗管为圆管，将图 1 (a) 所示单元结构制备成圆形样件，制备过程主要分为三个过程，如图 16 所示。

表 4 实验样件的相关材料参数

Table 4. Material parameters of experimental samples.

	Density (kg/m ³)	Young's modulus (GPa)	Poisson ratio
Membrane	1200	1.8	0.38
Magnets	7594	200	0.29
Epoxy resin	1150	4.35	0.38

- a) 取适当大小的薄膜，无褶皱置于直径为 120 mm 的圆形绣撑中；图 16 (a)。
- b) 在薄膜的边界处，施加张力的同时锁紧绣撑，使其具有一定的张力，然后将框架胶结在薄膜上，待胶固化后移除绣撑，并在中心贴敷磁铁；图 16 (b)。
- c) 将圆柱形磁铁贴附于螺柱的一端，将附着有磁铁的螺柱旋进外框架，并将其贴附于框架，然后旋进两螺柱上的磁铁，使其距离薄膜磁铁的磁间隙相等；图 16 (c)。

最后，将圆形样件置于阻抗管中进行传输损失测试；图 16 (d)。

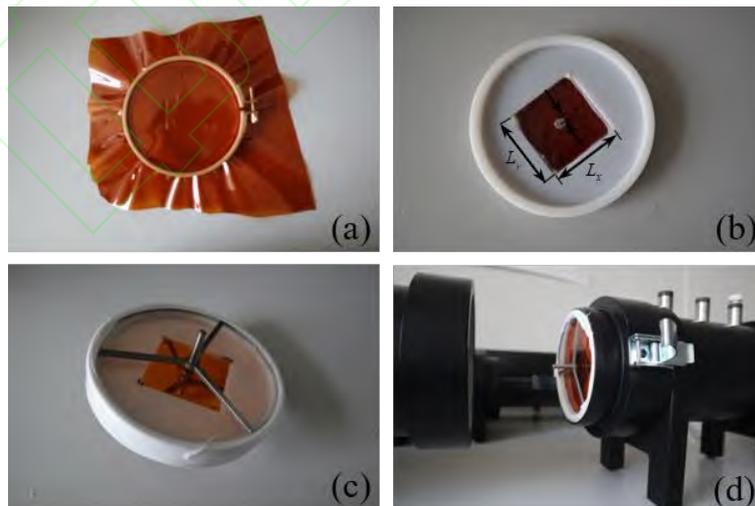


图 16 QZSMAMM 单元的制备过程：(a) 施加薄膜张力；(b) 将中心贴敷有磁铁的张力薄膜粘接于支撑框架；(c) 添加外围磁铁；(d) 将样件置于阻抗管

Fig. 16. Schematic of the preparation process of QZSMAMM unit: (a) applying membrane tension; (b) tension membrane with a magnet applied to the center is bonded to the support frame; (c) adding peripheral

magnets; (d) test sample positioned in impedance tube.

4.2 薄膜张力反演

如前所述，薄膜的张力对结构的隔声性能影响较大。鉴于在试样的制备过程中很难精确确定薄膜的预张力大小，本文采用反演法，先根据实验测得无磁力负刚度下的隔声曲线，依据有限元法反演出薄膜的预张力大小并与实验结果作对比，验证曲线是否吻合，然后将反演出的薄膜预张力带入含动态磁负刚度的有限元数值模拟中，将预测与实验结果进行对比，再次验证曲线是否吻合，以验证理论模型的有效性。

根据 4.1 节给出的实验样件结构参数，经过实验和仿真反演得到的薄膜预张力大小为 $T = 210 \text{ N/m}$ ，其 TL 曲线对比如图 17 所示。可见，实验和仿真的 TL 峰谷和曲线走势吻合较好，验证了薄膜预张力反演的正确性，表明该预张力可用于预测含动态磁负刚度的隔声效果。

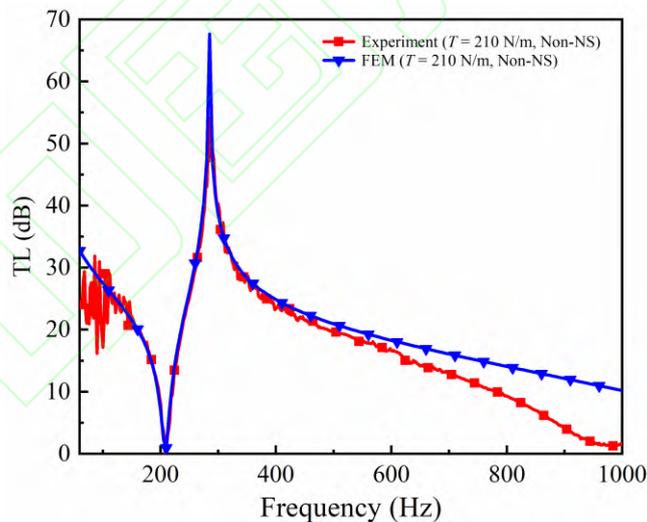


图 17 实验和有限元反演张力的传输损失对比

Fig. 17. Comparison between experimentally measured and numerically predicted transmission loss versus frequency curves.

4.3 传输损失测试

为进一步验证本文理论模型的正确性，采用图 18 所示传输损失实验装置，基于传递函数法，在 60~1000 Hz 频段内，分别测试传统薄膜声学超材料（无磁负刚度）和准

零刚度薄膜声学超材料样件的传输损失。实验装置主要由声源、阻抗管、功率放大器、数据采集器、笔记本电脑和试验样件组成，管径为 100 mm。为减少实验结果的离散误差，采用多次实验取平均。测试前，首先调节两螺柱使其上磁铁与薄膜磁铁的磁间隙相等，记录磁间隙距为 d ，然后将其置于阻抗管中进行传输损失测试。分别调节磁间隙为 $d_1 = 4 \text{ mm}$ ， $d_2 = 3.8 \text{ mm}$ 和 $d_3 = 3.5 \text{ mm}$ ，由式 (5) 计算得到的磁负刚度为 $K_{mag} = -181 \text{ N/m}$ ， $K_{mag} = -212 \text{ N/m}$ 和 $K_{mag} = -269 \text{ N/m}$ ，然后将其与 4.2 节反演得到的薄膜预张力一并带入有限元模拟中计算传输损失，实验结果与有限元模拟的对比如图 19 所示，峰/谷值频率见表 5。图 19 中的红色和蓝色实线代表无磁负刚度的实验和仿真；黑色实线和虚线分别代表 $d_1 = 4 \text{ mm}$ 时的实验和仿真；绿色实线和虚线分别为 $d_2 = 3.8 \text{ mm}$ 的实验和仿真；棕色实线和虚线分别为 $d_3 = 3.5 \text{ mm}$ 的实验和仿真。实验和有限元仿真吻合较好，同时实验结果显示四组对照结构的 TL 峰值频率与第一谷值频率差依次为 78 Hz，128 Hz，144 Hz 和 155 Hz，且第二谷频率几乎无变化，展现了第一谷频率相较于峰频率和第二隔声谷频率向低频移动的更快，体现了 QZSMAMM 的低频且宽频带的隔声特性。

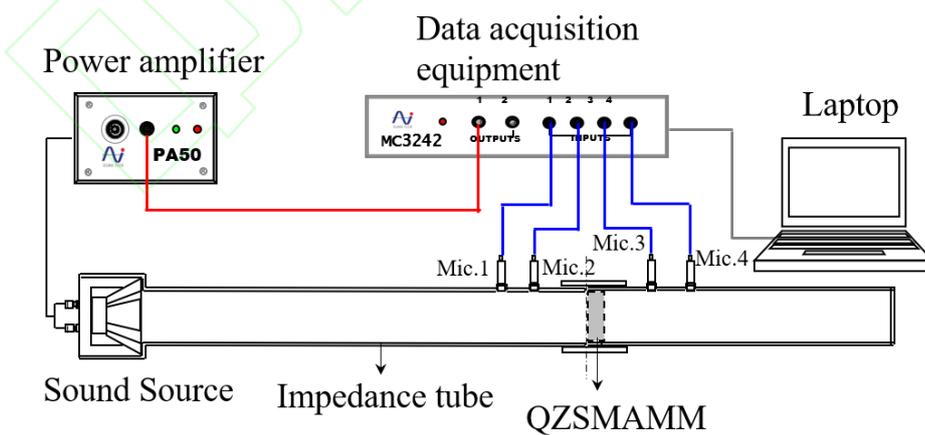


图 18 传输损失实验装置

Fig. 18. Schematic of transmission loss experimental setup.

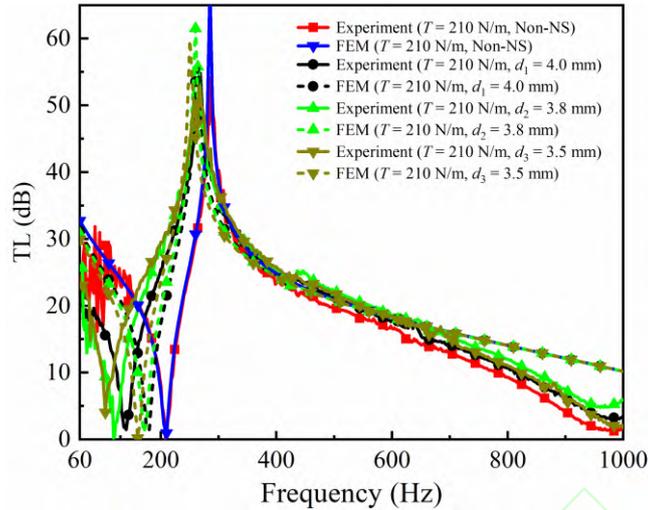


图 19 传输损失的实验测量与数值模拟对比

Fig. 19. Comparison between experimentally measured and numerically predicted transmission loss versus frequency curves.

表 5 实验和数值模拟的峰/谷频率

Table 5. Experimentally measured and numerically predicted peak/valley frequencies.

Peak/valley Frequency(Hz)	$T = 210 \text{ N/m}$	$T = 210 \text{ N/m}$ $d_1 = 4.0 \text{ mm}$	$T = 210 \text{ N/m}$ $d_2 = 3.8 \text{ mm}$	$T = 210 \text{ N/m}$ $d_3 = 3.5 \text{ mm}$
Experiment	286/208	268/140	262/118	259/104
FEM	286/211	264/178	259/167	251/158

5 结论

本文提出一种具有动态磁负刚度的新型薄膜声学超材料，采用伽辽金法建立了其在有限尺寸下的隔声理论模型，并通过有限元仿真和实验测试的方法验证了理论预测的准确性，并对隔声机理进行了分析和讨论。主要结论如下：

(1) 磁负刚度主要与磁铁的几何尺寸、磁间隙、表面极化强度和方向有关，其余参数不变下，增大剩余磁通密度或减小磁间隙，均能增大动态磁负刚度。

(2) 薄膜在一阶模态频率时出现明显的传输损失 (TL) 谷值现象，薄膜-质量同相振动，薄膜的横向平均速度达到极大值且等效质量面密度近似为零，声波几乎全透射；通过调节磁负刚度，可消除薄膜的一阶模态共振，等效质量面密度达到极小非零，TL 谷值大幅提升，声波部分反射。

(3) TL 峰值频率处，薄膜-质量反相振动，薄膜的横向平均速度为零且等效质量

面密度趋于无穷，声波几乎全反射。在具有相同峰值频率条件下，相较于传统的薄膜声学超材料，本文提出的新型薄膜声学超材料在峰值频率处具有更高的隔声量，带宽更宽。

总体而言，除了基本的材料和几何参数，传统薄膜声学超材料主要依赖张力设计调整隔声曲线，而新型薄膜声学超材料引入了新的物理变量——动态磁负刚度，可有效抑制由于有限尺寸边界带来的低频共振，实现低频段有效的隔声效果，为薄膜/板状结构的低频噪声控制提供了新的设计思路。

参考文献

- [1] Gao N S, Wu J G, Lu K, Zhong H B 2021 *Mech. Syst. Sig. Process.* **154** 107504
- [2] Kang Z X, Song R X, Zhang H J, Liu Q 2021 *Appl. Acoust.* **174** 107785
- [3] Ma G C, Sheng P 2016 *Sci. Adv.* **2** e1501595
- [4] Mei J, Ma G C, Yang M, Yang Z Y, Wen W J, Sheng P 2012 *Nat. Commun.* **3** 756
- [5] Deng K, Ding Y Q, He Z J, Zhao H P, Shi J, Liu Z Y 2009 *J. Appl. Phys.* **105** 124909
- [6] Peng S S, He Z J, Jia H, Zhang A Q, Qiu C Y, Ke M Z, Liu Z Y 2010 *Appl. Phys. Lett.* **96** 263502
- [7] Zhu X F, Liang B, Kan W W, Zou X Y, Cheng J C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 014301
- [8] Liu Z Y, Zhang X, Mao Y, Zhu Y Y, Yang Z, Chan C T, Sheng P 2000 *Science* **289** 1734
- [9] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022
- [10] Gao N, Qu S C, Li J, Wang J, Chen W Q 2021 *Int. J. Mech. Sci.* **208** 106695
- [11] Nguyen H, Wu Q, Xu X C, Chen H, Tracy S, Huang G L 2020 *Appl. Phys. Lett.* **117** 134103
- [12] Demelofilho N G R, Claeys C, Deckers E, Desmet W 2020 *Mech. Syst. Sig. Process.* **139** 106624
- [13] Xiao Y, Wen J H, Wen X S 2012 *J. Sound Vib.* **331** 5408
- [14] Yang J, Lee J S, Lee H R, Kang Y J 2018 *Appl. Phys. Lett.* **112** 091901
- [15] Zhao X Z, Liu G Q, Zhang C, Xia D, Lu Z M 2018 *Appl. Phys. Lett.* **113** 074101

- [16] Wang X N, Zhou Y D, Sang J Q, Zhu W Y 2020 *Appl. Acoust.* **158** 107045
- [17] Lin Q H, Lin Q L, Wang Y H, Di G Q 2021 *Compos. Struct.* **273** 114312
- [18] Wang X L, Zhao H, Luo X D, Huang Z Y 2016 *Appl. Phys. Lett.* **108** 041905
- [19] Langfeldt F, Riecken J, Gleine W, von Estorff O 2016 *J. Sound Vib.* **373** 1
- [20] Langfeldt F, Kemsies H, Gleine W, von Estorff O 2017 *Phys. Lett. A.* **381** 1457
- [21] Li Y L, Zhang Y L, Xie S C 2020 *Appl. Acoust.* **168** 107427
- [22] Xu Q S, Qiao J, Sun J Y, Zhang G Y, Li L Q 2021 *J. Sound Vib.* **493** 115823
- [23] Yang Z Y, Mei J, Yang M, Chan N H, Sheng P 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 204301
- [24] Lu Z B, Yu X, Lau S K, Khoo B C, Cui F S 2020 *Appl. Acoust.* **157** 107003
- [25] Li X Y, Zhao J J, Wang W J, Xing T, Zhu L Y, Liu Y N, Li X H 2022 *Appl. Acoust.* **187** 108514
- [26] He Z H, Zhao J B, Yao H, Chen X 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 214302 (in Chinese) [贺子厚, 赵静波, 姚宏, 陈鑫 2019 物理学报 **68** 214302]
- [27] Naify C J, Chang C M, Mcknight G, Nutt S 2011 *J. Appl. Phys.* **110** 751
- [28] Tan X J, Wang B, Wang L C, Zhu S W, Chen S, Yao K L 2022 *Compos. Struct.* **286** 115308
- [29] Wang K, Zhou J X, Cai C Q, Xu D L, Ouyang H J 2019 *Appl. Math. Modell.* **73** 581
- [30] Yuan S J, Sun Y, Zhao J L, Meng K, Wang M, Pu H Y, Peng Y, Luo J, Xie S R 2020 *J. Sound Vib.* **482** 115449
- [31] Xu Q R, Shen C, Han F, Lu T J 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 244302 (in Chinese) [胥强荣, 沈承, 韩峰, 卢天健 2021 物理学报 **70** 244302]
- [32] Allag H, Yonnet J P 2009 *Ieee. Trans. Magn.* **45** 3969
- [33] Oyelade A O, Chen Y, Zhang R J, Hu G K 2018 *Int. J. Appl. Mech.* **10** 05
- [34] Wu J S, Luo S S 1997 *J. Sound Vib.* **200** 179
- [35] Zhang G Y 2014 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [张光玉 2014 博士学位论文 (长沙: 国防科技大学)]
- [36] Meirovitch L 2001 *Fundamentals of Vibrations* (McGraw-Hill Higher Education) pp529-530
- [37] LEE J H, KIM J 2002 *J. Sound Vib.* **251** 349

Low-frequency sound insulation performance of novel membrane acoustic metamaterial with dynamic negative stiffness*

Xu Qiang-rong¹⁾²⁾ Zhu Yang¹⁾²⁾ Lin Kang¹⁾²⁾ Shen Cheng¹⁾²⁾† Lu Tian-jian¹⁾²⁾†

1) (State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, PR China)

2) (MIIT Key Laboratory of Multifunctional Lightweight Materials and Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, PR China)

Abstract

For improving the low-frequency sound insulation properties of membrane/plate structures, a new quasi-zero stiffness membrane acoustic metamaterial with dynamic magnetic negative stiffness is proposed. Upon applying the equivalent magnetic charge theory to derive the dynamic magnetic negative stiffness, a theoretical model of proposed metamaterial with finite dimensions is established based on the Galerkin method. Through a combination of theoretical analysis, numerical simulation and experimental measurement, the low-frequency (1-1000 Hz) sound insulation performance of the metamaterial is investigated from several perspectives, including structural modality, vibration mode, average velocity, phase curve, equivalent mass density, and equivalent spring-mass dynamics model. Results show that, at a certain initial membrane tension, decreasing the magnetic gap or increasing the residual flux density can increase the dynamic magnetic negative stiffness. This in turn leads to decreased peak frequency and enlarged bandwidth of sound insulation, thus achieving effective low-frequency sound insulation over a wide frequency band. Further, when the magnetic gap is larger than the second critical magnetic gap and smaller than the first critical magnetic gap, the first-order modal resonance of the metamaterial disappears, and the corresponding value of sound insulation valley increases significantly, thus demonstrating superior sound insulation effect with wide frequency band. The proposed method of using dynamic magnetic negative stiffness to improve low-frequency sound insulation valleys due to modal resonance provides useful theoretical guidance for designing membrane/plate type low-frequency sound insulation metamaterials.

Keywords: membrane-type acoustic metamaterial, tunable acoustic insulation, magnetic negative stiffness, low frequency broadband

* Project supported by Nanjing University of Aeronautics and Astronautics Postgraduate Research and Practice Innovation Fund (No. xcxjh20210106), by the National Natural Science Foundation of China (11502110 and 11972185) and the Open Fund of the State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures (No. SV2018-KF_01).

† Corresponding authors. E-mail: tjlu@nuaa.edu.cn (TJL); cshen@nuaa.edu.cn (CS)